ASUPRA REZOLVĂRII SISTEMELOR DE ECUAȚII LINEARE PRIN METODA LUI NEWTON

de

B. JANKÓ, D. OLTEANU, ȘI V. DAVID

Se consideră sistemul de ecuații liniare avînd coeficienții și termenii liberi reali:

$$\begin{aligned} &x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n - b_1 = 0 \\ &a_{21}\, x_1 + x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n - b_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + x_n - b_n = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

au scriind sub forma matricială

$$Ax - b = 0 \tag{1'}$$

unde s-a notat:

$$A = (a_{ij})\,;\; a_{ii} = 1\,;\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pentru aplicarea metodei lui Newton sistemul (1) se pune sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} &x_1 + A_1 = 0 \\ &x_2 + A_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &x_n + A_n = 0 \end{aligned} \tag{1''}$$

unde avem:

$$A_1 = \sum_i a_{1i} x_i - b_1, \quad (i \neq 1)$$
$$A_2 = \sum_i a_{2i} x_i - b_2, \quad (i \neq 2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \sum_i a_{ni} x_i - b_n, \quad (i \neq n)$$

Formăm acum sistemul neliniar

$$P^{(i)}(x_i; A_i) = \varphi(x_i)\Phi(A_i; C_i)(x_i + A_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

unde funcţiile $\varphi(x_i)$ şi $\Phi(A_i; C_i)$ nu admit rădicini reale în interval finit şi se aleg astfel ca ele să fie de formă simplă, ceea ce înseamnă că valorile ei pot fi calculate uşor prin operaţii elementare sau că există tabele pentru ele). În ce priveşte coeficientul C_i din funcţia $\Phi(A_i; C_i)$ acesta se determină din condiţia: $\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_{x^{(0)}} = 0$ pentru $i \neq j$ (3)

unde $x^{(0)}$ este un vector dat, considerat ca aproximaţie iniţială pentru sistemul (1). Observăm că condiţia (3) este echivalentă cu următoarea:

$$\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial A_i}\right)_{x^{(0)}} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3'}$$

Notînd

$$P(X) \equiv \begin{pmatrix} P^{(1)}(x_1; A_1) \\ \vdots \\ P^{(n)}(x_n; A_n) \end{pmatrix}$$

derivata în sens Fréchet a operaţiei $P(x)$ pentru vectorul $x^{(0)}$ se prezintă sub forma:

$$P'(X_0) \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1}\right)_{x^{(0)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial x_2}\right)_{x^{(0)}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \left(\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x_n}\right)_{x^{(0)}} \end{pmatrix}$$

Astfel metoda modificată a lui Newton-Kantorovici

$$x^{k+1} = x^{(k)} - [P'(x^{(0)})]^{-1}P(x^{(k)}) \tag{4}$$

ia următoarea formă concretă, scrisă pe componente:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P^{(i)}(x_i^{(k)}; A_i^{(k)})}{\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_{x^{(0)}}}, \ (i = 1, 2, \ldots, n; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4'}$$

Privind convergenţa algoritmului (4') putem stabili următorul rezultat:

TEOREMĂ. *Fie operaţia $P(x)$ derivabilă în sens Fréchet, care transformă elementele spaţiului (n — dimensional) X în el însuşi şi care mai satisface următoarele condiţii:*

1. *Pentru elementul $x^{(0)}$ al aproximaţiei iniţiale, operatorul liniar $P'(x^{(0)})$ admite inversul*

$$\Gamma_0 = [P'(x^{(0)})]^{-1}$$

2. *Are loc delimitarea:*

$$\|\Gamma_0 P(x^{(0)})\| \leq \eta_0$$

3. *Derivata $P'(x)$ este lipschitziană în sensul*

$$\|\Gamma_0 [P'(\xi_1) - P'(\xi_2)]\| \leq \bar{k} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

unde elementele ξ_1, ξ_2 aparţin domeniului $\|x - x^{(0)}\| \leq 2\eta_0$;

4. Constantele η_0, $\bar{k}$ *satisfac inegalitatea:*

$$\bar{h}_0 = \eta_0 \bar{k} < \frac{1}{2}$$

În aceste condiţii sistemul (1) admite soluţia x^*, iar aproximaţiile succesive $x^{(k)}$ definite prin algoritmul (4) converg în normă spre x^*, iar ordinea convergenţei şi eroarea se exprimă astfel:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \rho^{k-1} \|x^* - x^{(1)}\|$$

unde am notat

$$\rho = 1 - \sqrt{1 - \bar{h}_0} < 1$$

Teorema enunţată este valabilă pentru ecuaţia operaţională neliniară $P(x) = \theta$ definită dintr-un spaţiu Banach X. În demonstraţie se trece de la $P(x) = \theta$ la ecuaţia echivalentă considerată sub formă $\Gamma_0 P(x) = \theta$; iar mai departe se procedează la fel ca în demonstraţia teoremei de convegenţă pentru metoda modificată a lui Newton [1].

Observaţii: 1. Teorema enunţată constituie o generalizare a rezultatelor din lucrările [1] şi [2].

2. Condiţiile teoremei pot fi slăbite şi mai departe înlocuind condiţia lipschitziană cu cea holderiană, dată sub forma următoare:

$$\|\Gamma_0 [P'(\xi_1) - P'(\xi_2)]\| \leq \bar{k} \|\xi_1 - \xi_2\|^{\alpha}$$

unde $0 \leq \alpha \leq 1$, iar ξ_1 şi ξ_2 aparţin sferei $\|x - x^{(0)}\| \leq 2\eta_0$.

3. Funcţiile auxiliare $\varphi(x)$ şi $\Phi(A; C)$ se aleg în mod convenabil, în aşa fel ca constanta lipschitziană $\bar{k}$ să fie mică.

BIBLIOGRAFIE

[1] L. V. Kantorovici, *O metode Niutona*, Trudi. Inst. Steklova, **XXVIII** (1949) p. 127.
[2] B. Janko, *Metoda lui Newton și rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuații algebrice liniare.*

SUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DE NEWTON

(Résumé)

Le présent ouvrage constitue un développement et une généralisation des résultats concernant la résolution approximative des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Newton, reçus dans les ouvrages [1] et [2].