# REZOLVAREA ECUAŢIILOR CU MULŢIMI

de

AUREL IOANOVICIU ŞI ŞTEFAN N. BERŢI

## INTRODUCERE

În teoria mulţimilor şi în aplicaţiile acesteia (topologie, teoria evenimentelor, calculul probabilităţilor, etc.) adesea se iveşte problema rezolvării unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu mulţimi. Astfel sînt de exemplu ecuaţiile [1]:

$$AX = AB,$$

$$A + X = A + B,$$

$$AB + X = (A + C)(B + C).$$

Observaţie. Pentru simplificarea scrierii am adoptat notaţia $A \cup B = A + B$; $A \cap B = AB$; $\complement A = \bar{A}$.

Anumite identităţi din teoria mulţimilor pot fi generalizate folosind asemenea ecuaţii. Astfel în cazul identităţii

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

se cere aflarea unor mulţimi X, Y încît

$$A + BC = (A + X)(A + Y).$$

O soluţie particulară a acestei ecuaţii este:

$$X = B, \ Y = C.$$

În rezolvarea acestor ecuaţii metoda folosită nu este unitară, aceasta bazîndu-se pe diferite artificii care permit rezolvarea completă numai în cazuri particulare.

Vom cita din lucrarea [1] rezolvarea ecuaţiei

$$AB + X = (A + C)(B + C).$$

Se folosește identitatea

$$(A + C)(B + C) = AB + C$$

și se obține soluția

$$X = \overline{AB}C + ABD,$$

unde $D$ este o mulțime arbitrară. Din această soluție rezultă că se presupune cunoscută rezolvarea ecuației de forma

$$A + X = A + B$$

a cărei soluție este

$$X = \bar{A}B + AD$$

unde $D$ este o mulțime arbitrară.

Evident că soluția prezentată folosește anumite artificii care intr-un caz mai complicat ar fi greu de găsit.

În cele ce urmează ne propunem să dăm o metodă unitară pentru rezolvarea oricărei ecuații sau sistem de ecuații cu mulțimi.

## I. TABLOURI BOOLEENE

D e f i n i ț i e. *Un tablou dreptunghiular format din $2^m$ linii și $2^n$ coloane cu elementele* 0 *și* 1

$$(a_{i,j}) = (a_{i,j})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,2^n} \\ \cdot & & \cdots \\ \cdot & & \cdots \\ \cdot & & \cdots \\ a_{2^m,1} & \cdots & a_{2^m,2^n} \end{pmatrix}$$

*se numește* **tablou boolean** *dacă se introduc operațiile*:

$$(a_{i,j}) \circ (b_{i,j}) = (a_{i,j} \circ b_{i,j})$$
$$(i = 1, \ldots, 2^m; j = 1, \ldots, 2^n)$$
$$\neg (a_{i,j}) = (\neg a_{i,j})$$

$\circ$ *fiind oricare din operațiile binare ale algebrei propoziționale, iar* $\neg$ *fiind negația.*

Operațiile cu tablourile booleene satisfac proprietățile calculului propozițional. De exemplu

$$(a_{i,j}) \Rightarrow (b_{i,j}) = (\neg (a_{i,j})) \vee (b_{i,j}).$$

Propoziției identic adevărate îi corespunde tabloul format din elementele 1 iar propoziției identic false cel format din elementele 0.

## 2. CORESPONDENȚA DINTRE TABLOURILE BOOLEENE ȘI FUNCȚIILE DE MULȚIMI

Să considerăm funcția de mulțimi:

$$F = F(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n)$$

unde $F$ reprezintă expresia obținută prin aplicarea operațiilor din teoria mulțimilor (reuniune, intersecție, complementară, etc.) asupra mulțimilor $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$.

$M$ fiind o mulțime și $T$ mulțimea totală, vom nota:

$$\overset{1}{M} = M, \overset{0}{M} = \overline{M} = T - M.$$

Sistemul format din funcțiile de mulțimi

$$\overset{\eta_1}{A_1} \ldots \overset{\eta_m}{A_m} \overset{\varepsilon_1}{X_1} \ldots \overset{\varepsilon_n}{X_n} = \prod_{i=1}^{m} \overset{\eta_i}{A_i} \prod_{j=1}^{n} \overset{\varepsilon_j}{X_j} \quad (\eta_i, \varepsilon_j \in \{0, 1\})$$

se numește *partiția* determinată de mulțimile $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$, acest sistem fiind format din $2^{m+n}$ funcții.

Se știe că orice funcție de mulțimi $F(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n)$ se poat reprezenta sub forma

$$(1) \qquad \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \overline{0,1}^{m+n}} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \overset{\alpha}{T} \overset{\eta_i}{A_i} \overset{\varepsilon_j}{X_j}$$

unde

$$(2) \qquad \alpha = \alpha(\eta_1, \ldots, \eta_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}$$

$$((\eta_1, \ldots, \eta_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \overline{0,1}^{m+n})$$

este o funcție determinată de $F$. S-a notat cu $\overline{0,1}^{m+n}$ mulțimea sistemelor ordonate de $m + n$ numere egale cu 0 sau 1.

Reprezentarea (1) a funcției $F$ se numește *reprezentare normală disjunctivă* sau *reprezentare canonică*. Fiind dată funcția $\alpha$ din (2) funcția $F$ este determinată, abstracție făcînd de transformările booleene echivalente.

Dacă

$$r = 1 + \sum_{k=1}^{m} \eta_k 2^{m-k}, \quad s = 1 + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l 2^{n-l}$$

vom nota

$$\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \beta(r, s)$$

deoarece corespondența

$$(\eta_1, \ldots, \eta_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \longleftrightarrow (r, s)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, 2^m; s = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

este biunivocă. Se poate arăta [2] că în această corespondență biunivocă

$$\eta_k = \frac{1-(-1)^{\left[\frac{r-1}{2^{m-k}}\right]}}{2}, \quad \varepsilon_l = \frac{1-(-1)^{\left[\frac{s-1}{2^{n-l}}\right]}}{2}.$$

Funcției $F$ respectiv funcției $\alpha$ pe care o determină îi corespunde tabloul booleean

$$F^* = (a_{i,j})$$

unde

$$a_{i,j} = \beta(i, j).$$

Astfel s-a realizat o corespondență biunivocă între familia funcțiilor de mulțimi $\{F\}$ și mulțimea tablourilor booleene $\{F^*\}$.

Vom da un exemplu. Funcției

$$F = F(A, X, Y) = (A + X)(A + Y)$$

îi corespunde tabloul booleean

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr

$$F = A + AX + AY + XY = A\overline{X}\,\overline{Y} + A\overline{X}Y + AX\overline{Y} + AXY + \overline{A}XY =$$
$$= \overline{T}\,\overline{A}\,\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{T}\,\overline{A}\,\overline{X}Y + \overline{T}\,\overline{A}X\overline{Y} + T\overline{A}XY + TA\overline{X}\,\overline{Y} + TA\overline{X}Y + TAX\overline{Y} +$$
$$+ TAXY =$$
$$= \overset{0\,0\,0\,0}{TAXY} + \overset{0\,0\,0\,1}{TAXY} + \overset{0\,0\,1\,0}{TAXY} + \overset{1\,0\,1\,1}{TAXY} + \overset{1\,1\,0\,0}{TAXY} + \overset{1\,1\,0\,1}{TAXY} + \overset{1\,1\,1\,0}{TAXY} +$$
$$+ \overset{1\,1\,1\,1}{TAXY}.$$

Efectuind calculele obținem

$$\begin{aligned}
\alpha(0,0,0) &= \beta(1,1) = 0 = a_{1,1} \\
\alpha(0,0,1) &= \beta(1,2) = 0 = a_{1,2} \\
\alpha(0,1,0) &= \beta(1,3) = 0 = a_{1,3} \\
\alpha(0,1,1) &= \beta(1,4) = 1 = a_{1,4} \\
\alpha(1,0,0) &= \beta(2,1) = 1 = a_{2,1} \\
\alpha(1,0,1) &= \beta(2,2) = 1 = a_{2,2} \\
\alpha(1,1,0) &= \beta(2,3) = 1 = a_{2,3} \\
\alpha(1,1,1) &= \beta(2,4) = 1 = a_{2,4}
\end{aligned}$$

care sînt tocmai elementele tabloului $F^*$.

*Observație.* Adesea se pune problema de a introduce anumite mulțimi noi într-o funcție de mulțimi. Astfel în loc de funcția $F(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n)$ se cere obținerea unei funcții de forma $G(A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+p},$

$X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+q}$) care să fie identică cu $F$. Această trecere de la $F$ la $G$ se poate obține folosind de exemplu identitatea

$$F + H\emptyset = G \equiv F,$$

unde

$$H = H(A_1, \ldots, A_{m-p}, X_1, \ldots, X_{n+q})$$

este o funcție arbitrară.

Prin trecerea dela $F$ la $G$ se schimbă și tabloul booleean $F^*$ (cu $2^n$ linii și $2^m$ coloane) într-un tablou booleean $G^*$ (cu $2^{n+q}$ linii și $2^{m-p}$ coloane).

Astfel, în exemplul precedent considerînd

$$F(A, X, Y) = (A + X)(A + Y) = G(A, B, C, X, Y)$$

obținem

$$G^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă se dă sistemul de funcții de mulțimi

(3) $$F_j = F_j(A_{1,j}, \ldots, A_{m_j,j}, X_{1,j}, \ldots, X_{n_j,j}), \quad (j = 1, \ldots, k)$$

și între mulțimile

$$A_{1,1}, \ldots, A_{m_k,k},$$

respectiv

$$X_{1,1}, \ldots, X_{n_k,k},$$

sînt distincte mulțimile

$$A_1, \ldots, A_m$$

respectiv

$$X_1, \ldots, X_n$$

atunci pe baza celor de mai sus putem trece dela sistemul (3) la sistemul de funcții

(4) $$G_j = G_j(A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n) \quad (j = 1, \ldots, k)$$

identice cu funcțiile sistemului (3). În acest caz vom spune că $G_j$ este *reprezentarea* funcției $F_j$ în sistemul $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$.

Să considerăm funcțiile $F_1$ și $F_2$. Fie $G_1$ și $G_2$ reprezentările lor în sistemul $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$ și $G_1^*$ și $G_2^*$ tablourile booleene corespunzătoare. Atunci avem evident

$$G_1^* \vee G_2^* = (G_1 + G_2)^*$$
$$G_1^* \wedge G_2^* = (G_1 G_2)^*$$
$$\neg G_1^* = \overline{G_1^*}.$$

Aceste relații permit traducerea operațiilor cu mulțimi în operații logice cu tablouri booleene corespunzătoare.

Observație. $G_1 = G_2$ înseamnă $G_1^* \Leftrightarrow G_2^*$.

În particular în sistemul $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$ mulțimile $A_i$, $X_j$ sînt funcții de mulțimi ale căror tablouri booleene sînt $A_i^*$, $X_j^*$. Tabloul booleean corespunzător funcției $G$ se obține traducînd conform celor de mai sus în limbaj logic operațiile care ne-au condus la $G$.

E x e m p l u. În sistemul $A, B, C, X, Y$ avem:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci

$$((A + X)(A + Y))^* = (A^* \vee X^*) \wedge (A^* \vee Y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rezultat care coincide cu cel obținut într-un exemplu precedent.

## 3. NOȚIUNEA DE SOLUȚIE BOOLEEANĂ

Fiind date funcțiile de mulțimi

$$\left.\begin{aligned} F_j &= F_j(A_{1,j}, \ldots, A_{m_j,j}, X_{1,j}, \ldots, X_{n_j,j}) \\ F'_j &= F'_j(A'_{1,j}, \ldots, A'_{m'_j,j}, X'_{1,j}, \ldots, X'_{n'_j,j}) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, \ldots, k)$$

putem forma cu ele sistemul de ecuații

$$F_j = F'_j \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

în care mulțimile $A$ sînt date (parametri) iar mulțimile $X$ sînt mulțimi care trebuie determinate (necunoscute). Reprezentînd funcțiile $F$ în $A_1, \ldots, A_m, X_1, \ldots, X_n$ (trecerea dela (3) la (4)) sistemul (5) devine

$$G_j = G'_j \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{6}$$

Acestui sistem îi corespunde tabloul booleean

$$S^* = \bigwedge_{j=1}^{k} (G_j^* \Leftrightarrow G_j'^*) = (s_{i,j}) \tag{7}$$

numit soluția booleeană a sistemului (6). Vom vedea că soluția booleeană dă o informație totală asupra soluției sistemului și ale condițiilor de existență ale acestei soluții.

E x e m p l u. Pentru ecuația

$$A + BC = (A + X)(A + Y)$$

avem soluția booleeană

$$S^* = ((A^* \vee (B^* \wedge C^*)) \Leftrightarrow ((A^* \vee X^*) \wedge (A^* \vee Y^*))) =$$

$$= \left(\left(\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \vee \left(\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}\right)\right) \chi$$

$$\wedge \left(\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}\right)\Bigg)\Bigg)$$

deci

$$S^* = \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

## 4. REZOLVAREA UNUI SISTEM SPECIAL DE ECUAȚII CU MULȚIMI

Vom studia rezolvarea unui sistem de ecuații cu mulțimi de forma

$$(8_0)\qquad \prod_{i=1}^{n} \overset{\varepsilon_{j,i}}{X_i} = \emptyset \quad (j = 1, \ldots, s)$$

unde

$$\varepsilon_{j,i} \in \{0,1\} \text{ și } \overset{0}{M} = \overline{M},\ \overset{1}{M} = M.$$

Ecuația

$$XA = \emptyset$$

are soluția

$$X = \overline{A}D$$

unde $D$ este o mulțime arbitrară. Astfel putem rezolva oricare dintre ecuațiile sistemului $(8_0)$, de exemplu prima ecuație

$$\prod_{i=1}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{X_i} = \emptyset$$

în raport cu oricare dintre necunoscute, de exemplu $X_1$. Obținem

$$(9)\qquad \overset{\varepsilon_{1,1}}{X_1} = X_{n+1}\overline{\prod_{i=2}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{X_i}} = X_{n+1}\sum_{i=2}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{\overline{X}_i}$$

unde $X_{n+1}$ este o mulțime arbitrară. Din (9) rezultă:

$$(10_1)\qquad X_1 = \overset{\varepsilon_{1,1}}{\overline{X_{n+1}\sum_{i=2}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{\overline{X}_i}}}$$

Inlocuind $(10_1)$ într-una din ecuațiile sistemului $(8_0)$ avem

$$(11)\qquad \overset{\varepsilon_{j,n+1}}{\overline{X_{n+1}\sum_{i=2}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{\overline{X}_i}}}\ \prod_{k=2}^{n} \overset{\varepsilon_{j,k}}{X_k} = \emptyset$$

unde

$$\varepsilon_{j,n+k} = \delta_{\varepsilon_{1,k}}^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \varepsilon_{1,k} \neq \varepsilon_{j,k} \\ 1 & \text{dacă } \varepsilon_{1,k} = \varepsilon_{j,k} \end{cases}$$

este simbolul lui Kronecker.

Vom deosebi două cazuri.

a) $\varepsilon_{j,n+1} = 1$. În acest caz (11) devine

$$\left(X_{n+1}\sum_{i=2}^{n} \overset{\varepsilon_{1,i}}{\overline{X}_i}\right)\prod_{k=2}^{n} \overset{\varepsilon_{j,k}}{X_k} = \emptyset$$

adică

$$X_{n+1}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}}\right) \varnothing =$$

sau

$$X_{n+1}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}}\right) = \varnothing$$

Vom efectua următoarele transformări

$$\sum_{i=2}^{n} X_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \sum_{i=2}^{n}\left( X_i^{1-\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}}\right) = \sum_{i=2}^{n} \prod_{k=2}^{n} T^{1-\alpha_{1,j,i}} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \sum_{i=2}^{n} T^{1-\alpha_{1,j,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}},$$

unde

$$\alpha_{1,j,i} = \delta_{\varepsilon_{j,i}}^{\varepsilon_{1,i}}$$

Avem

$$\sum_{i=2}^{n} T^{1-\alpha_{1,j,i}} = \begin{cases} \varnothing \text{ dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \ldots, n) \\ T \text{ în alt caz.} \end{cases}$$

Deci în reuniunea

$$\sum_{i=2}^{n} T^{1-\alpha_{1,j,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}}$$

termenii sînt fie mulţimea vidă, fie mulţimea constantă (faţă de indicele i):

$$\prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}}$$

şi astfel

$$\sum_{i=2}^{n} T^{1-\alpha_{1,j,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} \varnothing \text{ dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \ldots, n) \\ \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} \text{ în alt caz.} \end{cases}$$

Deci în cazul nostru (cazul a)) ecuaţia aleasă din sistemul (11) devine fie identitatea

$$(11_k') \qquad \varnothing = \varnothing$$

fie o ecuaţie de formă

$$(11_k'') \qquad \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} X_{n+1} = \varnothing.$$

*Observaţie.* În cazul ($11'_a$) numărul de ecuaţii ale sistemului ($8_q$) se reduce. Într-adevăr acest caz este realizat dacă $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ şi $\varepsilon_{j,n+1} = 1$, deci $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{j,i}$. Atunci ecuaţia din care l-am exprimat pe $X_1$ este identică cu ecuaţia în care l-am substituit. Presupunînd că eliminăm de la bun început ecuaţiile care se repetă, nu mai apare cazul ($11'_a$) şi astfel în cazul a) ajungem la ecuaţii de forma

$$(11_a) \qquad \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} X_{n+1} = \emptyset.$$

b) $\varepsilon_{j,n+1} = 0$. În acest caz (11) devine

$$\left( X_{n+1} + \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} \right) \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset.$$

Făcind calculele:

$$\overline{X}_{n+1} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} + \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \emptyset$$

$$\prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{j,k}} = \begin{cases} \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} & \text{dacă } \varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i} \quad (i = 2, \ldots, n) \\ \emptyset & \text{în alt caz} \end{cases}$$

obţinem ecuaţia

$$(11'_b) \qquad \overline{X}_{n+1} \prod_{k=2}^{n} X_k^{\varepsilon_{1,k}} + \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{1,i}} = \emptyset$$

dacă $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ sau

$$(11''_b) \qquad \overline{X}_{n+1} \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset$$

în alt caz. Ecuaţia ($11'_b$) este echivalentă cu

$$(11'''_b) \qquad \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset.$$

*Observaţie.* Ecuaţia ($11'''_b$) s-a obţinut în cazul $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_{j,i}$ $(i = 2, \ldots$ $\ldots, n)$ şi $\varepsilon_{1,1} \neq \varepsilon_{j,1}$; deci în cazul în care factorii diferiţi de $X_1$ ai ecuaţici din sistemul ($8_0$) din care l-am exprimat pe $X_1$ coincid cu factorii respectiv din ecuaţia în care l-am substituit pe $X_1$. Deci cele două ecuaţii au forma

$$(12) \qquad U\overline{V} = \emptyset, \; UV = \emptyset$$

care formează un sistem echivalent cu ecuaţia

$$(13) \qquad V = \emptyset.$$

Presupunînd în acest caz că de la bun început în sistemul $(8_0)$ înlocuim perechile de ecuații de forma (12) cu o singură ecuație de forma (13) nu mai apare cazul $(11_1'')$. Astfel în cazul nostru (cazul b)), ajungem la ecuații de forma

$$(11_b) \qquad \prod_{i=2}^{n} X_i^{\varepsilon_{j,i}} \overline{X}_{n+1} = \emptyset.$$

În concluzie ecuațiile $(11_a)$ și $(11_b)$ se pot scrie unitar sub forma

$$(8_1) \qquad \prod_{i=2}^{n+1} X_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset \quad (j = 2, \ldots, s).$$

*Observație.* Subliniem din nou că $(8_1)$ s-a obținut presupunînd că de la bun început s-au efectuat simplificările din observațiile de la a) și b).

Astfel sistemul $(8_0)$ s-a redus la ecuația $(10_1)$ și sistemul $(8_1)$.

Sistemul de ecuații $(8_1)$ are aceeași formă ca și sistemul $(8_0)$, ajungîndu-se de la $(8_0)$ la $(8_1)$ prin mărirea indicilor necunoscutelor cu o unitate; ele se mai deosebesc prin faptul că $X_{n-1}$ este o mulțime arbitrară și sistemul $(8_1)$ are cu o ecuație mai puțin decît $(8_0)$.

Aplicînd acest procedeu de s ori obținem sistemele:

$$(8_r) \qquad \prod_{i=r+1}^{n+r} \overline{X}_i^{\varepsilon_{j,i}} = \emptyset \quad (r = 0, 1, \ldots, s-1;\ j = r+1, \ldots, s)$$

și egalitățile

$$(10_{r+1}) \qquad X_{r+1} = \overbrace{\sum_{i=r+2}^{n+r} \overline{X}_i^{\varepsilon_{j,i}}}^{\varepsilon_{j,r+1}} X_{n+r+1} \quad (r = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Relația $(10_s)$ exprimă pe $X_s$ în funcție de $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$. Substituind $(10_s)$ în $(10_{s-1})$ avem exprimarea lui $X_{s-1}$ în funcție de $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$. Continuînd aceste substituții obținem pe $X_1, \ldots, X_s$ în funcție de $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$.

Deosebim două cazuri:

1) $s \geqslant n$. În acest caz vom avea pe $X_1, \ldots, X_n$ în funcție de $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$. Să notăm $X_j = f_j(X_{s+1}, \ldots, X_{s+n})$, $(j = 1, \ldots, n)$.

2) $s < n$. În acest caz vom avea pe $X_1, \ldots, X_s$ în funcție de $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$. Vom nota $X_j = f_j(X_{s+1}, \ldots, X_{s+n})$, $(j = 1, \ldots, n)$ unde $f_{s+k}(X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}) = X_{s+k}$, $(k = 1, \ldots, n-s)$. În felul acesta putem uni cele două cazuri, obținînd soluția generală a sistemului $(8_0)$ sub forma

$$(14) \qquad X_j = f_j(X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

unde $X_{s+1}, \ldots, X_{s+n}$ sînt *mulțimi arbitrare*. Pentru a evita situația în care mulțimile necunoscute și mulțimile arbitrare sînt reprezentate cu același simbol vom nota

$$X_{s+j} = D_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

şi astfel vom avea formulele

$$X_j = f_j(D_1, \ldots, D_n) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

*Observaţie.* Notînd cu $S$ sistemul $(8_0)$ soluţia **(15)** a acestui sistem se mai poate scrie sub forma

$$X_j = \sum_{(\varepsilon'_{1,j} \cdots \varepsilon'_{n,j}) \in \Phi_j(S)} \overset{\varepsilon'_{1,j}}{D_1} \overset{\varepsilon'_{2,j}}{D_2} \ldots \overset{\varepsilon'_{n,j}}{D_n} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

unde $\Phi_j(S)$ este o mulţime de sisteme $n$-dimensionale cu componentele 0 şi 1.

E x e m p l u l 1. Sistemul

$$XYZ = \emptyset, \ X\overline{YZ} = \emptyset$$

se scrie sub forma

$$\overset{1}{X}\overset{1}{Y}\overset{1}{Z} = \emptyset, \ \overset{1}{X}\overset{0}{Y}\overset{0}{Z} = \emptyset$$

şi are soluţia

$$X = ZVW + \bar{Z}V = \overset{1}{Z}\overset{1}{V}\overset{1}{W} + \overset{0}{Z}\overset{1}{V}, \ Y = ZV + \overline{W} = \overset{0}{Z}\overset{1}{V} + \overset{0}{W}, Z = Z = \overset{1}{Z}$$

E x e m p l u l 2. Sistemul

$$\overline{XYZ} = \emptyset, \ \bar{X}YZ = \emptyset, \ X\bar{Y}Z = \emptyset, \ XYZ = \emptyset$$

are soluţia

$$X = \bar{D}F + \overline{DE} + EF, \ Y = D\bar{E} + DF, \ Z = E\bar{F} + DE$$

unde $D$, $E$ şi $F$ sînt mulţimi arbitrare.

## 5. REZOLVAREA SISTEMELOR ÎN CAZUL GENERAL

Să considerăm sistemul

$$G_i = G_j \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

şi soluţia lui booleeană

$$S^* = \bigwedge_{j=1}^{k} (G_i^* \Leftrightarrow G_j^*) = (s_{i,j})_{2^m \times 2^n} = (s_{i,j}). \tag{7}$$

Linia $i$ din tabloul booleean (7) corespunde componentei

$$C_i = \prod_{j=1}^{m} \overset{\eta_{i,j}}{A_j}$$

a partiţiei determinate de cei m parametri $A_1, \ldots, A_m$, unde

$$\eta_{i,j} = \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{i-1}{2^{j-1}}\right]}}{2}.$$

Elementele egale cu 0 din linia $i$ reprezintă componentele vide determinate de necunoscutele $X$ în $C_i$. Astfel în componenta $C_i$ obținem un sistem de ecuații de forma $(8_a)$, mulțimea totală fiind $C_i$. În componenta $C_i$ soluția (16) corespunzătoare sistemului obținut din linia $i$ este

$$X_{j,i} = C_i \sum_{\Phi_{j,i}} \prod_{k=1}^{n} D_k^{\varepsilon'_{k,j}}$$

unde

$$X_{j\nu} = C_i X_j.$$

*Soluția sistemului de ecuații cu mulțimi (6) este*

$$X_j = \sum_{i=1}^{2^m} X_{j,i} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

*iar condiția necesară și suficientă de existență a acestei soluții este*

$$\left(\sum_{j=1}^{2^n} s_{i\nu j} = 0\right) \Rightarrow \left(\prod_{j=1}^{m} A_j^{\tau_{i,j}} = \emptyset\right). \tag{18}$$

Într-adevăr sistemul de ecuații

$$\prod_{j=1}^{n} X_{i,j} = \emptyset \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$$

care se obține dintr-o linie cu toate elementele nule, nu conține ecuații identice și are soluția $C_i = \emptyset$.

## 6. EXEMPLE

1). Să considerăm ecuația

$$A + BC = (A + X)\ (A + Y).$$

S-a arătat că

$$((A + X)(A + Y))^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Asemănător se obţine

$$(A+BC)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluţia booleeană a acestei ecuaţii este

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru liniile 1—3 sistemele $(8_0)$ au forma

$$X_j Y_j = \emptyset \qquad (j = 1, 2, 3)$$

cu soluţia

$$X_j = D\overline{E}C_j, \quad Y_j = EC_j$$

Pentru linia a 4-a sistemul $(8_0)$ este

$$\overline{X}_4\overline{Y}_4 = \emptyset, \quad \overline{X}_4 Y_4 = \emptyset, \quad X_4\overline{Y}_4 = \emptyset$$

cu soluţia

$$X_4 = Y_4 = C_4.$$

Pentru liniile 5—8 nu se impun condiţii, deci

$$X_j = DC_j, \; Y_j = EC_j, \qquad (j = 5, 6, 7, 8)$$

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$X = \sum_{j=1}^{2^3} X_j = D\overline{E}\,(C_1 + C_2 + C_3) + C_4 + D(C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{2^3} Y_j = E\,(C_1 + C_2 + C_3) + C_4 + E(C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

care se mai poate scrie

$$X = \bar{A}B\bar{E} + \bar{A}BC + AD, \; Y = \bar{A}E + \bar{A}BC + A\bar{E}$$

unde $D$ și $E$ sînt mulțimi arbitrare.

*Interpretarea soluției.* Pentru ca să aibă loc identitatea

$$A + BC = (A + X)(A + Y)$$

(identitatea care pune problema generalizării legii distributivității) atît $X$ cît și $Y$ trebuie să acopere componente $C_4 = \bar{A}BC$, deci $C_4 \subset XY$, și

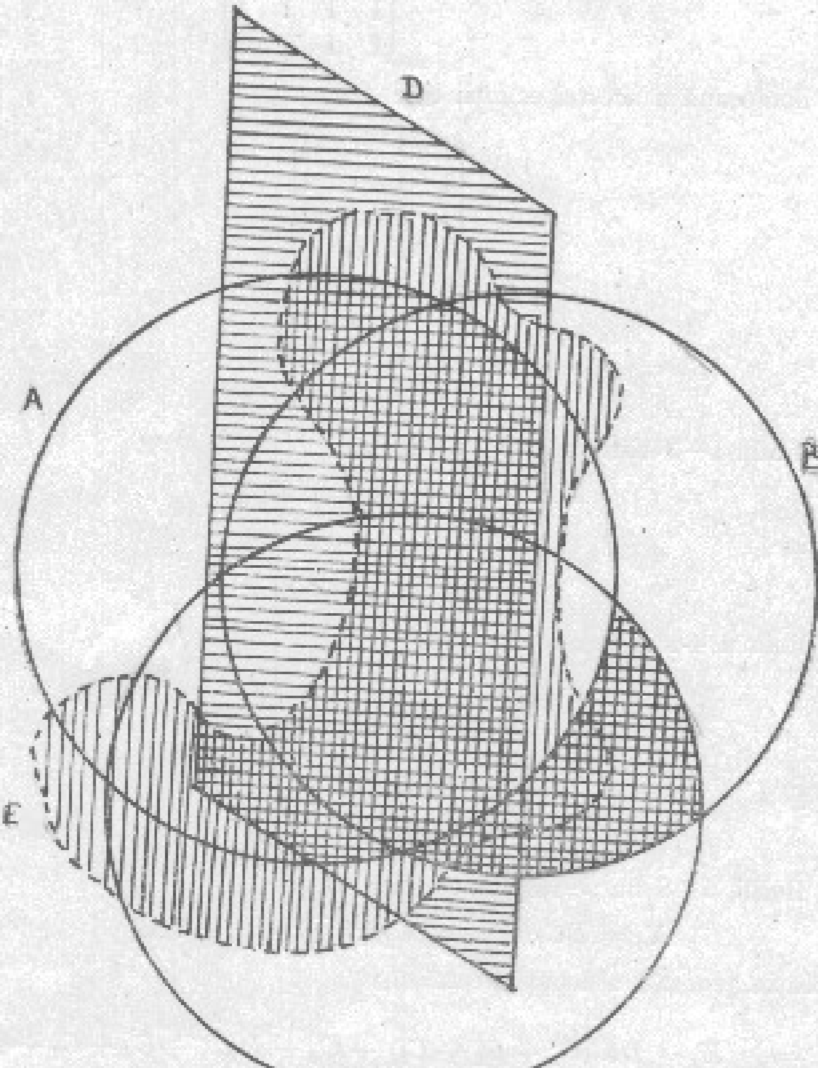


figura 1

în componentele $C_1 = \bar{A}B\bar{C}$, $C_2 = \bar{A}BC$, $C_3 = \bar{A}B\bar{C}$ trebuie ca $X$ şi $Y$ să fie disjuncte, deci $XY(C_1 + C_2 + C_3) = \emptyset$. În cazul particular al legii distributivităţii aceste condiţii sînt îndeplinite.

*Reprezentarea grafică a soluţiei.* În figura 1 am reprezentat sferele logice ale mulţimilor date $A$, $B$, $C$ şi ale mulţimilor arbitrare $D$ şi $E$; mulţimile $X$ şi $Y$ sînt reprezentate prin haşurare orizontală respectiv verticală.

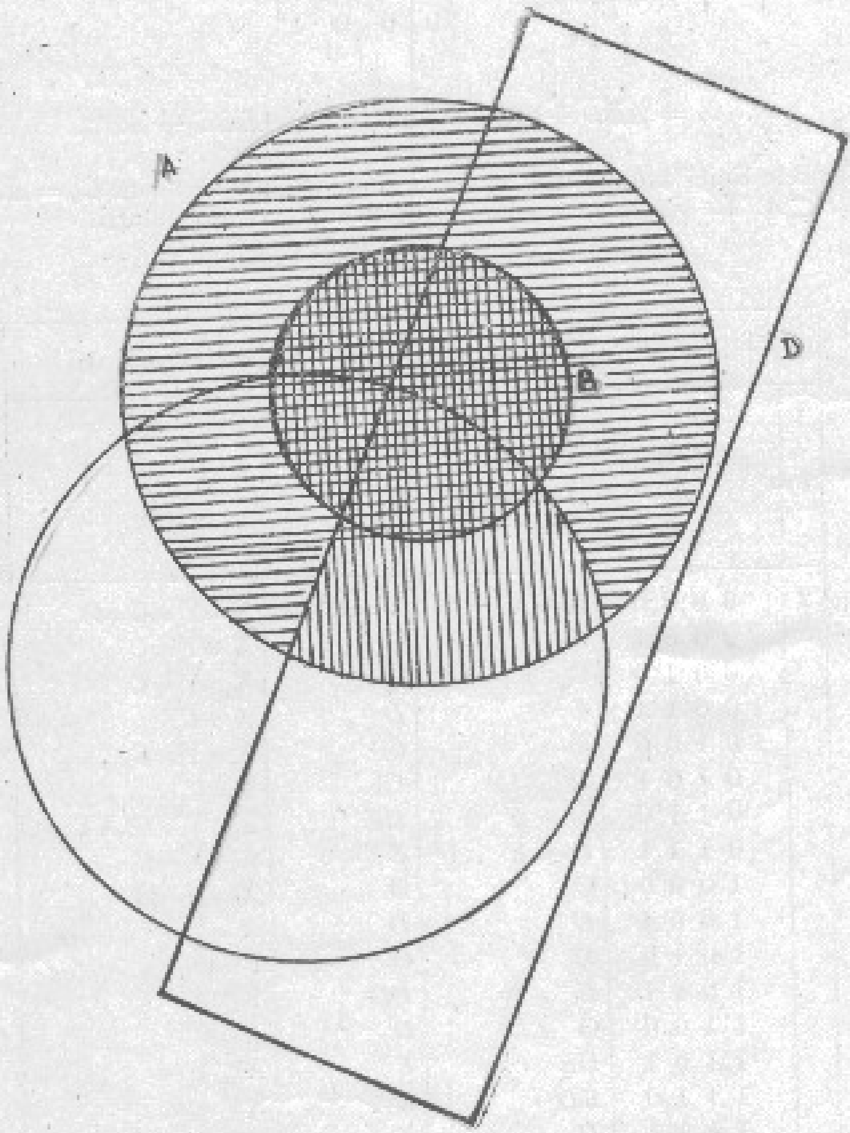


figura 2

2. Fie sistemul

$$X + Y = A, \ XY = B.$$

Soluția booleeană a acestui sistem este

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci

$$X = A\bar{B}\bar{D} + A\bar{B}\bar{E} + AB, \ Y = A\bar{B}DE + AB;$$

Elementele liniei a doua din $S^*$ fiind zero, trebuie să avem $C_2 = \bar{A}B = \emptyset$, deci $B \subset A$. În figura 2 se dă reprezentarea acestei soluții.

*TABEL*

| $n$ | Tip de linie | $X$ | $Y$ | Observații |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 0 | $X = C = \emptyset$ | | |
| | 0 1 | $X = C$ | | |
| | 1 0 | $X = \emptyset$ | | |
| | 1 1 | $X = D$ | | |
| 2 | 0 0 0 0 | $X = C = \emptyset$ | $Y = C = \emptyset$ | $X = Y = C = \emptyset$ |
| | 0 0 0 1 | $C$ | $C$ | $X = Y = C$ |
| | 0 0 1 0 | $C$ | $\emptyset$ | $X = \bar{Y} = C$ |
| | 0 0 1 1 | $C$ | $D$ | $X = C$ |
| | 0 1 0 0 | $\emptyset$ | $C$ | $\bar{X} = Y = C$ |
| | 0 1 0 1 | $D$ | $C$ | $Y = C$ |
| | 0 1 1 0 | $\bar{D} + \bar{E}$ | $DE$ | $X + Y = C, \ XY = \emptyset$ |
| | 0 1 1 1 | $\bar{D} + \bar{E}$ | $E$ | $X + Y = C$ |
| | 1 0 0 0 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $X = Y = \emptyset$ |
| | 1 0 0 1 | $D$ | $D$ | $X = Y$ |
| | 1 0 1 0 | $D$ | $\emptyset$ | $Y = \emptyset$ |
| | 1 0 1 1 | $E$ | $ED$ | $Y \subset X$ |
| | 1 1 0 0 | $\emptyset$ | $D$ | $X = \emptyset$ |
| | 1 1 0 1 | $DE$ | $E$ | $X \subset Y$ |
| | 1 1 1 0 | $\bar{E}D$ | $E$ | $XY = \emptyset$ |
| | 1 1 1 1 | $D$ | $E$ | |

3). În tabelul de mai sus sînt date soluțiile sistemelor de ecuații de forma $(8_0)$ care se obțin pe o anumită componentă în cazurile $n = 1$ și $n = 2$, pentru toate tipurile de linii care pot apărea într-o soluție booleeană

În acest tabel $C$ este componenta respectivă, $D$ și $E$ sînt mulțimi arbitrare.

Acest tabel permite rezolvarea rapidă a sistemelor de ecuații cu mulțimi în cazurile $n = 1$ și $n = 2$.

Metoda prezentată în această lucrare permite programarea la mașinile de calcul a rezolvării ecuațiilor cu mulțimi.


## RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS À ENSEMBLES

### Résumé

Dans la théorie des ensembles et dans les applications de celle-ci (topologie, théorie des événements, calcul des probabilités, etc, ...) il se présente souvent l'occasion de résoudre des équations et systèmes des équations à ensembles. Les méthodes de résolution sont difficiles et nécessitent en général des différents artifices. Les auteurs proposent une méthode simple et unitaire pour résoudre les équations et les systèmes des équations à ensembles.

Dans ce but on introduit la notion de tableau booleen (chap. 1), on établit la correspondance entre les tableaux booleens et les fonctions des ensembles (chap. 2) et on donne la notion de solution booleene (chap. 3). Dans le chapitre 4 on passe à la résolution d'un système spécial des équations à ensembles, pour arriver dans le chapitre 5 à la résolution des systèmes dans le cas général.

La méthode exposée dans cette note a l'avantage en plus de pouvoir programmer la résolution des équations à ensembles aux calculateurs digitals.


## BIBLIOGRAFIE


1. Volodin, B. Ganin, M. ș. a. *Rukovodstvo dlia inginerov po reșeniu zadaci teorii veroiatnostei*, Leningrad, 1962.