DESPRE PRINCIPIUL MAJORANTEI APLICAT LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

de

A. GAIDICI

În lucrările [1], [2], [3] se demonstrează posibilitatea rezolvării ecuației operaționale cu ajutorul principiului majorantei, folosind metoda parabolelor tangente și a iperbolelor tangente.

În această lucrare, aplicînd principiul majorantei, vom stabili noi condiții de convergență pentru metoda parabolelor tangente (I.1), a iperbolelor tangente (II.1) și a lui VÕHANDU (III.1). Rezultatele de față le generalizează pe cele obținute în alte lucrări fără aplicarea principiului majorantei.

Fie ecuația

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde operația neliniară $P(x)$ este definită și continuă într-un domeniu S complet și convex din spațiul liniar normat X și cu valori în spațiul Y de același tip. Vom presupune că $P(x)$ admite derivate în sens Fréchet pînă la ordinul trei inclusiv.

Alături de ecuația (1) mai considerăm și ecuația

$$Q(z) = 0 \tag{2}$$

unde $Q(z)$ este o funcție reală de o variabilă reală, definită și derivabilă de cel puțin trei ori pe intervalul $[\bar{z}, z_0]$. Pentru precizarea ideilor vom presupune $Q(z_0)$, $Q'(z_0) > 0$ și $Q''(z)$, $Q'''(z) > 0$ unde $z \in [\bar{z}, z_0]$

Vom spune că ecuația (2) majorează ecuația (1) dacă:

a) $\|P(x_0)\| \leq Q(z_0)$

b) există operatorul $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ pentru care $\|\Gamma_0\| = \dfrac{1}{Q'(z_0)}$

c) $\|P''(x)\| \leqslant Q''(z)$, $\|P'''(x)\| \leqslant Q'''(z)$ pentru

$$\|x - x_0\| \leqslant z_0 - z \leqslant z_0 - \bar{z}$$

1. Metoda parabolelor tangente.

Pentru rezolvarea ecuației (1) vom aplica algoritmul [4]

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right)\Gamma_n P(x_n) \tag{1.1}$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$, I fiind operatorul identitate, iar pentru rezolvarea ecuației (2) aplicăm

$$z_{n+1} = z_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{Q''(z_n)Q(z_n)}{Q'^2(z_n)}\right)\frac{Q(z_n)}{Q'(z_n)} \tag{1.2}$$

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximațiile inițiale x_0 și z_0 sînt satisfăcute condițiile :*

1° *ecuația* (2) *majorează ecuația* (1),

2° $\frac{Q''(z_0)Q(z_0)}{Q'^2(z_0)} < \sqrt{3} - 1$

atunci din existența soluției $z^* \in [\bar{z}, z_0]$ și convergența metodei (1.2) *pentru ecuația* (2) *rezultă existența soluției $x^* = \lim x_n$ a ecuației* (1), *șirul $\{x_n\}$ se obține din* (1.1). *Rapiditatea convergenței este caracterizată de relația*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant z_n - z^* \tag{3}$$

Demonstrație. Din condițiile teoremei rezultă

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant z_0 - z_1 \tag{1.1}$$

Aplicînd formula generalizată a lui Taylor sub formă integrală [1]

$$P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} P'''(x)(x_1 - x)^2\,dx$$

în care înlocuim pe $x_1 - x_0$ cu expresia ei din (1.1) obținem

$$P(x_1) = \frac{1}{2}P''(x_0)\{\Gamma_0 P(x_0)\}\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))^2\} +$$

$$+ \frac{1}{8}P''(x_0)\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))^2\}^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} P'''(x)(x_1 - x)^2\,dx$$

pe care o comparăm cu expresia analoagă pentru $Q(z_1)$ şi ţinînd cont de condiţiile teoremei avem

$$\|P(x_1)\| \leqslant Q(z_1) \tag{1.3}$$

Expresia lui $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$ o vom calcula astfel

$$\|\Gamma_0(P'(x_0) - P'(x_1))\| \leqslant \|\Gamma_0\| \, \|P''(x')\| \, \|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{Q''(z')(z_0 - z_1)}{Q'(z_0)} = q_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q''(z_0)Q(z_0)}{Q'^2(z)} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{Q''(z_0)Q(z_0)}{Q'^2(z_0)}\right] < 1$$

unde $x' = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $z' = z_0 + t(z_0 - z_1)$, $0 < t < 1$

Există deci operatorul $\Gamma_0 P'(x_1) = I - (I - \Gamma_1 P'(x_1)$ pentru care

$$\|[\Gamma_0 P'(x_1)]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - q_0} = \frac{1}{1 - \dfrac{Q'(z_0) - Q'(z)}{Q'(z_0)}} = \frac{Q'(z_0)}{Q(z_1)} \tag{1.4}$$

şi cu aceasta exrpesia lui $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1} = [\Gamma_0 P'(x_1)]^{-1}\Gamma_0$ devine

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \|[\Gamma_0 P'(x_1)]^{-1}\| \leqslant \|\Gamma_0\| \leqslant \frac{1}{Q'(z_1)} \tag{1.5}$$

Din (1. 1), (1.2), (1.3), (1.5) şi condiţiile teoremei rezultă

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant z_1 - z_2 \tag{1.6}$$

Prin inducţie completă, la fel ca pentru (1.3) şi (1.6), obţinem

$$\|P(x_n)\| \leqslant Q(z_n) \tag{1.7}$$

şi

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant z_n - z_{n+1} \tag{1.8}$$

de unde

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant z_n - z_{n+p} \tag{1.9}$$

Trecînd la limită în această relaţie pentru $p \to \infty$ şi din faptul că sfera $S(x_0,r) = \{x \mid \|x - x_0\| \leqslant r, r = z_0 - z\}$ este completă, deducem relaţia (3), din care pentru $n \to \infty$ rezultă $x^* = \lim x_n$. Pe baza continuităţii lui $P(x)$ şi a lui $Q(z)$ şi din (1.7) obţinem $P(x^*) = \theta$.

În continuare arătăm că aproximaţiile $\{x_n\}$ rămîn în sfera considerată. Într-adevăr din inegalitatea

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\|$$

şi inegalităţile obţinute din (1.8) deducem $\|x - x_0\| \leqslant z_0 - z = r$

2. Metoda iperbolelor tangente.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) aplicăm algoritmul [5]

$$x_{n+1} = x_n - \left(I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right)^{-1} \Gamma_n P(x_n) \tag{II.1}$$

şi respectiv pentru ecuaţia (2)

$$z_{n+1} = z_n - \frac{2Q'(z_n)Q(z_n)}{2Q'^2(z_n) - Q''(z_n)Q(z_n)} \tag{II.2}$$

TEOREMA 2. *Dacă pentru aproximaţiile iniţiale x_0 şi z_0 sînt satisfăcute condiţiile :*

1° *ecuaţia* (2) *majorează ecuaţia* (1),

2° $\frac{Q''(z_0)Q(z_0)}{Q'^2(z_0)} < \frac{2}{3}$

atunci din existenţa soluţiei $z^* \in [\bar{z}, z_0]$ *şi convergenţa metodei* (III.2) *pentru ecuaţia* (2) *rezultă existenţa soluţiei* $x^* = \lim x_n$ *a ecuaţiei* (1). *Totodată avem îndeplinită şi relaţia* (3).

Demonstraţie. Din condiţiile teoremei rezultă

$$||x_1 - x|| \leqslant z_0 - z_1 \tag{2.1}$$

Aplicînd formula generalizată a lui Taylor şg din (II.1) deducem

$$P(x_1) = \frac{1}{4} P''(x_0)\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\}(x_1 - x_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} P'''(x)(x_1 - x)^2 \mathrm{d}x$$

şi o relaţie asemănătoare pentru $Q(z_1)$. Ţinînd cont de (2.1) şi de condiţiile teoremei avem

$$||P(x_1)|| \leqslant Q(z_1)$$

Mai departe demonstraţia se continuă ca în cazul precedent.

3. Metoda lui V̆ahandu.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) aplicăm algoritmul [6]

$$x_{n+1} = x_n - (I - \Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n))^{-1}\left[I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right]\Gamma_n P(x_n)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n -$$

$$-\left[I + \frac{1}{2}(I - \Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n))^{-1}(\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n))\right]\Gamma_n P(x_n) \tag{III.1}$$

şi respectiv

$$z_{n+1} = z_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{Q''(z_n)Q(z_n)}{Q'^2(z_n) - Q''(z_n)Q(z_n)}\right)\frac{Q(z_n)}{Q'(z_n)} \tag{III.2}$$

Inainte de toate calculăm cîteva expresii pe care le vom utiliza mai jos. În acest scop introducem notația $A_n = \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)$. Cu aceasta se observă că avem egalitatea

$$A_n(I - 2A_n) = (I - 2A_n)A_n$$

apoi

$$(I - 2A_n)^{-1}A_n = A_n(I - 2A_n)^{-1}$$

ce se verifică direct aplicînd la dreapta A_n^{-1} și ținînd cont de egalitatea precedentă. Considerăm expresia

$$R_n = \Gamma_n P(x_n) + (x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2$$

în care înlocuim pe $x_{n+1} - x_n$ dat de (III.1). Astfel obținem

$$R_n = -\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{\Gamma_n P(x_n)\}\{(I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\} -$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{(I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\}\{x_{n+1} - x_n\}$$

Într-adevăr

$$R_n = \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_n) - (I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n) +$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{[I + (I - 2A_n)^{-1}A_n]\Gamma_n P(x_n)\}^2$$

$$R_n = -A_n(I - 2A_n)^{-1}\Gamma_n P(x_n) + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{\Gamma_n P(x_n)\}\{(I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\} +$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\}\{\Gamma_n P(x_n) + (I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\}$$

$$R_n = -\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{\Gamma_n P(x_n)\}\{(I - 2A_n)^{-1}\Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_n) -$$

$$-(I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\} -$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\{(I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)\}\{X_{n+1} - x_n\}$$

expresia

$$S_n = (I - 2A_n)^{-1}\Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_n) - (I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)$$

se transformă în

$$S_n = [(I - 2A)_n^{-1} - I - (I - 2A_n)^{-1}A_n]\Gamma_n P(x_n)$$

$$S_n = (I - 2A_n)^{-1}(I - (I - 2A_n) - A_n]\Gamma_n P(x_n) =$$

$$= (I - 2A_n)^{-1}A_n\Gamma_n P(x_n)$$

pe care o introducem în ultima expresie a lui R_n.

TEOREMA 3. *Dacă pentru aproximațiile inițiale x_0 și z_0 sînt satisfăcute condițiile:*

1° ecuația (2) majorează ecuația (1);

2° $\frac{Q''(z_0)Q(z_0)}{Q'^2(z_0)} < 2 - \sqrt{2}$

atunci din existența soluției $z^* \in [\bar{z}, z_0]$ și convergența metodei (III. 2) *pentru ecuația* (2) *rezultă existența soluției $x^* = \lim x_n$ a ecuației* (1). *Relația* (3) *rămîne adevărată și în acest caz.*

Demonstrație. Din condițiile teoremei rezultă

$$\|x_1 - x_0\| \leq z_0 - z_1 \tag{3.1}$$

Cu ajutorul formulei generalizate a lui Taylor și a experesiei lui R_n de mai sus deducem

$$P(x_1) = -\frac{1}{2}P''(x_0)\{\Gamma_0 P(x_0)\}\{(I - 2A_0)^{-1}A_0\Gamma_0 P(x_0)\} -$$

$$-\frac{1}{2}P''(x_0)\{(I - 2A_0)^{-1}A_0\Gamma_0 P(x_0)\}\{x_1 - x_0\} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x^*} P'''(x)(x_1 - x)^2\, dx$$

și o relație asemănătoare pentru $Q(z_1)$. Mai departe demonstrația este analoagă cu cea a teoremelor precedente.

Observații.

1) Teoremele prezentate rămîn valabile dacă presupunem ca în [7] că $P'(x)$ admite inversa $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ uniform mărginit în raport cu norma, adică

$$\|\Gamma(x)\| \leq \frac{1}{Q'(z)}$$

pentru orice $x \in S(x_0, r)$ și orice $z \in [\bar{z}, z_0]$

2) Alegînd pe $Q(z)$ de formă particulară

$$Q(z) \equiv Q(z_0) + Q'(z_1)(z - z_0) + \frac{1}{2} - Q''(z_0)(z - z_0)^2 + \frac{N(z - z_0)^3}{3!}$$

atunci teoremele 1 și 2 ne dau rezultatele din [8] și [9].

3) Condiția $\|P'''(x)\| \leq Q'''(z)$ poate fi înlocuită prin

$$\|P''(x) - P''(x_0)\| \leq Q''(z_0) - Q''(z)$$

În acest caz formula generalizată a lui Taylor se aplică sub forma

$$P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (P''(x) - P''(x_0))(x - x_0)\, dx$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Мираков В. Е. *О принципе мажорант для метода Чебышева.* Успех. мат. наук 11, 3, 1956, 171—174

[2] Мираков В. Е.: *Принцип мажорант и метод касательных парабол для нелинейных функциональных уравнений.* Д. А. Н. СССР, 113, 1957, 977—979

[3] Шафиев Р. А.: *О методе касательных гипербол.* Д. А. Н. СССР, 149, 1963

[4] Нечепуренко: *О методе Чебышева для функциональных уравнений.* Успех. мат. наук, 2, *60*, 1964, 163—170

[5] Мертвецова М. А.: *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений.* Д. А. Н. СССР 88, 4, 1953, 611—614

[6] Vohandu L. K.: *Iteratsioonimeetoditest vorrandite lahendamisel,* Dissertation, Tartu (1955)

[7] Мысовских И. П.: *К вопросу о сходимости метода Ньютона.* Тр. Мат. инст. Стеклова 28, 1949

[8] Jankó B. şi Gaidici A.: *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metoda lui Cebîşev.* Stud. şi cercet. mat. t. **18**, 1966, 1139—1148

[9] Jankó B. şi Balázs M.: *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda iperbolelor tangente generalizate (II).* Stud. şi cercet. mat. t. **18**, 1966, 817—828

ON THE MAJORANT PRINCIPLE APPLIED FOR SOLVING NON-LINEAR OPERATIONAL EQUATIONS

Abstract.

In this paper the possibility of using majorant principle for solving operational equation $P(x) = 0$ is studied. $P(x)$ is an operation from the Banach space X to Y. As majorant the real equation $Q(z) = 0$ is considered.

The study is made for the case of tangent parabolae and tangent hyperbolae methods and for the method given in [6]. If $Q(z)$ has a particular form the results from [8], [9] and [6] are obtained.