DESPRE METODA LUI KAASIK PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE

de

B. JANKO ŞI D. OLTEANU.

Se consideră operaţia neliniară $P(x)$ definită în spaţiul Banach X, şi cu valori în el însuşi. Metoda lui Kaasik pentru rezolvarea iterativă a ecuaţiei operaţionale neliniare $P(x) = \theta$ se prezintă sub forma

$$x_{n+1} = x_n - (I + \lambda R_n)^{-1} [I + (\lambda + 1) R_n] \Gamma_n P(x_n) \tag{1}$$

unde λ este un parametru real, I este operatorul identitate; apoi

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

$P'(x_n)$ fiind derivata Fréchet a operaţiei $P(x)$ pentru elementul x_n, iar operaţia R este de forma

$$R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$$

$P''(x)$ fiind derivata Fréchet de ordinul 2.

Algoritmul (1) poate fi generat din clasa metodelor iterative de ordinul al treilea, avînd forma generală (2) $x_{n+1} = \psi(x_n)$ unde

$$\psi(x) \equiv x - [P'(x) + \mu(x) P(x)]^{-1} (P(x) + \Lambda(x) P^2(x))$$

unde μ, λ sînt operaţii biliniare definite în $X \times X$ şi cu valori în X.

Într-adevăr alegînd în mod convenabil operaţiile $\mu(x)$ şi $\Lambda(x)$, anume

$$\mu(x) \equiv \frac{\lambda}{2} P''(x) \Gamma(x)$$

respectiv

$$\Lambda(x)\, \xi_1 \xi_2 = \frac{\lambda + 1}{2} \Gamma(x) P''(x) (\Gamma(x) \xi_1)(\Gamma(x) \xi_2)$$

pentru orice $\xi_1, \xi_2 \in X$, atunci metoda generală (2) coincide cu algoritmul (1).

În felul acesta putem enunţa următorul rezultat:

TEOREMA. *Dacă operația $P(x)$ admite derivată Fréchet de ordinul 2 și mai sînt satisfăcute condițiile.*

1°. *Există inversa* $\Gamma(x) = [(P'(x)]^{-1}$ pentru orice x *din sfera*

$$||x - x_0|| \leqslant 2\delta_0$$

unde x_0 este aproximația inițială iar numărul δ_0 se va preciza mai jos;

2°. *Are loc delimitarea*

$$||\Gamma_0 P(x_0)|| \leqslant \eta_0$$

3°. *Operația $P'(x)$ este lipschitziană în sensul,*

$$||\Gamma_0 [P'(\xi_1) - P'(\xi_2)]|| \leqslant K ||\xi_1 - \xi_2||$$

pentru orice ξ_1, ξ_2 din sfera $||x - x_0|| \leqslant 2\delta_0$

4°. *Constantele η_0, K satisfac inegalitatea*

$$h_0 = \eta_0 K < 2$$

5°. *Există derivata Fréchet de ordinul 2 pentru operația $\Psi(x)$ și satisface condiția hölderiană,*

$$||\Psi''(\xi_1) - \Psi''(\xi_2)|| \leqslant \overline{M}_2 ||\xi_1 - \xi_2||^\alpha, \ (0 < \alpha \leqslant 1)$$

pentru orice ξ_1, ξ_2 din sfera $||x - x_0|| \leqslant 3\delta_0$ unde $\delta_0 = H\eta_0$ iar

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^i - 1}$$

6°. *Se presupune în fine că*

$$(2\delta_0)^{1+\alpha} \overline{M}_2 < 6$$

In aceste condiții ecuația operațională $P(x) = 0$ admite o soluție unică x^* în sfera $||x - x_0|| \leqslant 2\delta_0$ și algoritmul (1) este convergent de ordinul $2 + \alpha$, iar eroarea respectiv rapiditatea convergenței se exprimă în felul următor

$$||x^* - x_n|| \leqslant \overline{M}_2^{\frac{(2+\alpha)^n - 1}{\alpha + 1}} \delta_0^{(2+\alpha)^n}$$

Demonstrație. Condițiile 1° — 4° ale teoremei asigură existența soluției în sfera $||x - x_0|| \leqslant 2\,\delta_0$ [3]. Luînd în considerare și condițiile 5°, 6°, rezultă și unicitatea ei. Într-adevăr, se construiește ecuația $F(x) \equiv x - \Psi(x) = 0$ echivalentă cu $P(x) = 0$ și se presupune prin absurd că aceasta ar avea două soluții distincte x^* și $\bar{x}^*$.

În baza formulei tayloriene generalizate

$$||F(\bar{x}^*) - F(x^*) - F'(x^*)(\bar{x}^* - x^*) - \frac{1}{2} F''(x^*)(\bar{x}^* - x^*)^2|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6} \overline{M}_2 ||\bar{x}^* - x^*||^{2+\alpha}$$

de unde avînd în vedere că $\Psi''(x^*) = 0$, $\Psi'''(x^*) = 0$ obţinem

$$\left(1 - \frac{M_2}{6}(2\,\delta_0)^{1+\alpha}\right)||\bar{x}^* - x^*|| \leqslant ||F(\bar{x}^*) - Fx^*)|| = 0$$

iar de aici rezultă că $\bar{x}^* = x^*$

Pentru demonstrarea convergenţei se consideră

$$||\Psi(x_{n-1}) - \Psi(x^*) - \Psi'(x^*)(x_{n-1} - x^*) - \frac{1}{2}\Psi''(x^*)(\bar{x}^* - x^*)^2|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\overline{M}_2||x_{n-1} - x^*||^{2+\alpha}$$

de unde avem

$$||x^* - x_n|| \leqslant \frac{\overline{M}_2}{6}||x^* - x_{n-1}||^{2+\alpha}$$

din care se obţine în mod recurent

$$||x^* - x_n|| \leqslant \overline{M}_2^{\frac{(2+\alpha)^n - 1}{\alpha - 1}}\,\delta_0^{(2+\alpha)^n}$$

demonstrînd în felul acesta complet teorema enunţată.

Observaţie. Teorema stabilită constituie o generalizare a rezultatelor obţinute pînă în prezent; ea slăbeşte condiţiile date în lucrările [1] şi [2].

BIBLIOGRAFIE

1. K a a s i k: Ü. *O približionnom reşenii nelineinîh operatornîh uravnenii iteraţionnîmi metodami.* U.M.N. XII, 1, p. 195 (1957).
2. J a n k ó: B. *Sur la théorie unitaire des méthodes d'iteration pour la résolution des équations opérationnelles nonlinéaires* (I). Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. VI, A, 3, 301–311 (1961).
3. B. J a n k ó: *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale în spaţii Banach.* Ed. Acad. R. S. România, 1969.

ON KAASIK'S METHOD FOR SOLVING NON-LINEAR OPERATIONAL EQUATIONS

Abstract

The paper deals with non-linear operational equations of the form $F(x) = 0$ where $F(x)$ is a non-linear operation from the Banach space X into itself.

The theorem proved here gives the conditions for the existence and uniqueness of the solution using Kaasik's method.

It reprezents a generalization of the former results, obtained by weakening the conditions given in [1] and [2].