DESPRE METODE DE TIP NEWTON PENTRU ECUAȚII NELINIARE

de

I. COROIAN

Să considerăm spațiile Banach X și Y, Ω o submulțime deschisă din X și $P: \Omega \to Y$ un operator neliniar. Presupunem că $P(x)$ admite derivata $P'(x)$ în sens Fréchet în Ω_0 — închiderea unei submulțimi deschise a lui Ω. În ipoteza că există operatorul invers $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$, $x \in \Omega_0$, pentru rezolvarea ecuației $P(x) = 0$ putem aplica procedeul iterativ a lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)\, P(x_n), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Noi nu ne vom ocupa cu acest procedeu ci cu procedee iterative pe care le vom numi de tip Newton, de forma

$$x_{n+1} = x_n - M(x_n)P(x_n), \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

unde $M(x)$ este un operator definit pe Ω_0 cu valori în $[Y \to X]$ — mulțimea operatorilor liniari și mărginiți care transformă spațiul Y în X. Teoreme de convergență a metodelor de tip Newton către soluția ecuației operaționale $P(x) = 0$ a dat **J. E. Dennis** jr. în [1, 2]. În această lucrare vom da teoreme similare celor din [1,2], evitînd presupunerile referitoare la existența derivatei secunde $P''(x)$ în sens Frechet a operației $P(x)$.

TEOREMA 1. *Presupunem îndeplinite condițiile:*

(1) *Pentru orice* $x \in \Omega_0$, $M(x)$ *există și* $\|M(x)\| \leq B$,

(2) *pentru orice* $x', x'' \in \Omega_0$, $P'(x)$ *este lipschitziană, adică*

$$\|P'(x') - P'(x'')\| \leq K\|x' - x''\|, \; K \text{ fiind o constantă,}$$

(3) *există un* $x_0 \in \Omega_0$ *astfel ca* $0 < \|P(x_0)\| \leq \eta$,

(4) $\|I - P'(x)\, M(x)\| \leq \delta < 1$, *oricare ar fi* $x \in \Omega_0$ *și* I *fiind operația identică,*

(5) $h = \frac{B^2 K \eta}{1-\delta} < 2$,

(6) *sfera* $S(x_0, r) = \{x, ||x - x_0|| < r\} \subset \Omega_0$, $r = \frac{B\eta}{1-\alpha}$, $\alpha = \delta + (1-\delta)\frac{h}{2}$.

În aceste condiții ecuația $P(x) = 0$ *are cel puțin o soluție* x^*, *către care converge șirul* $\{x_n\}$ *dat de* $x_{n+1} = x_n - M(x_n)\,P(x_n)$, $x^* \in S(x_0, r)$ *iar rapiditatea convergenței este dată de relația*

$$||x_n - x^*|| < r\alpha^n.$$

Demonstrație. Să punem

$$\eta_0 = \eta,\ h_0 = h,\ \alpha_0 = \alpha, \tag{7}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n \alpha_n,\ h_n = \frac{B^2 K \eta_n}{1-\delta} = h_{n-1}\alpha_{n-1},\ \alpha_n = \delta + (1-\delta)\frac{h_n}{2}.$$

Din expresia lui α_n se vede că $0 < \alpha_n < 1$. Vom arăta prin inducție că în ipotezele noastre termenii șirului $\{x_n\}$ aparțin sferei $S(x_0,r)$ și că $||P(x_n)|| \leq \eta_n$ pentru orice n. Folosindu-ne de relația

$$||P(x) - P(y) - P'(y)(x-y)|| \leq \frac{K}{2}||x-y||^2, \tag{8}$$

dată în [5] pentru un operator care satisface (2), avem

$$||P(x_1)|| = ||P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) + P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0)|| \leq$$

$$\leq ||P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0)|| + \frac{K}{2}||x_1 - x_0||^2 \leq \frac{B^2 K\eta^2}{2} + ||P(x_0) -$$

$$- P'(x_0)\,M(x_0)\,P(x_0)|| \leq \frac{B^2 K\eta^2}{2} + ||I - P'(x_0)\,M(x_0)||\,||P(x_0)|| \leq$$

$$\leq \frac{B^2 K\eta^2}{2} + \delta\eta = \eta_0\left[\delta + (1-\delta)\frac{h_0}{2}\right] = \eta_0\alpha_0 = \eta_1.$$

Presupunem acum că $||P(x_k)|| \leq \eta_k$, $x_i \in S(x_0, r)$ pentru $k, i \leq n$ și să demonstrăm că $||P(x_{n+1})|| \leq \eta_{n+1}$ și $x_{n+1} \in S(x_0, r)$. Ne servim tot de (8)

$$||P(x_{n+1})|| \leq ||P(x_{n+1}) - P(x_n) - P'(x_n)(x_{n+1} - x_n)|| + ||P(x_n) +$$

$$+ P'(x_n)(x_{n+1} - x_n)|| \leq ||P(x_n) - P'(x_n)\,M(x_n)\,P(x_n)|| + \frac{K}{2}||x_{n+1} - x_n||^2 \leq$$

$$\leq ||I - P'(x_n)\,M(x_n)|| \cdot ||P(x_n)|| + \frac{K}{2}B^2\eta_n^2 \leq \delta\eta_n + \frac{B^2 K\eta_n^2}{2} =$$

$$= \eta_n\left[\delta + (1-\delta)\frac{h_n}{2}\right] = \eta_n\alpha_n = \eta_{n+1}.$$

Așadar pentru orice n avem

$$||P(x_n)|| \leq \eta_n. \tag{9}$$

Mai avem

$$\alpha_k = \delta + (1-\delta)\frac{h_k}{2} < \delta + (1-\delta)\frac{h_{k-1}}{2} = \alpha_{k-1},$$

$$\alpha_k < \alpha_{k-1} < \ldots < \alpha_1 < \alpha_0.$$

În continuare obținem

$$\eta_{k+1} = \eta_k \alpha_k = \eta_{k-1} \alpha_{k-1} \alpha_k = \ldots = \eta_0 \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_k < \eta_0 \alpha_0^{k+1} \qquad (10)$$

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \leqslant B \sum_{j=0}^{n} \eta_j < B\eta_0 \sum_{j=0}^{n} \alpha_0^k =$$

$$= \frac{B\eta_0}{1-\alpha_0}(1 - \alpha_0^{n+1}) < \frac{B\eta}{1-\alpha} = r,$$

relație care arată că $x_{n+1} \in S(x_0, r)$.
Să arătăm că șirul $\{x_n\}$ este un șir Cauchy

$$\|x_{k+n} - x_k\| \leqslant B \sum_{j=k}^{k+n-1} \eta_j < B \sum_{j=k}^{k+n-1} \eta_0 \alpha_0^j = B\eta_0 \left[\sum_{j=0}^{k+n-1} \alpha_0^j - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_0^j \right] =$$

$$= \frac{B\eta}{1-\alpha}(1 - \alpha^n)\, \alpha^k,$$

adică

$$\|x_{k+n} - x_k\| < \frac{B\eta}{1-\alpha}(1 - \alpha^n)\, \alpha^k. \qquad (11)$$

Inegalitatea (11) arată, avînd $0 < \alpha < 1$, că șirul $\{x_n\}$ este un șir Cauchy și X fiind spațiu Banach el are o limită x^*.
Dacă în (11) facem $n \to \infty$, obținem

$$\|x_k - x^*\| < r\, \alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

și în sfîrșit de aici pentru $k = 0$ obținem că $x^* \in S(x_0, r)$. Mai trebuie arătat că $P(x^*) = 0$. Din (9) și (10) avem

$$\|P(x_n)\| \leqslant \eta_n < \eta_0 \alpha^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{și} \quad \|P(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \|P(x^*)\|,$$

adică $P(x^*) = 0$.

Observația 1. Condiția (4) a teoremei 1 se poate slăbi cerînd îndeplinirea ei nu pentru orice $x \in \Omega_0$ ci numai pentru $x_n \in S(x_0, r)$, date de metoda iterativă $x_{n+1} = x_n - M(x_n)\, P(x_n)$.

Vom aplica acum teorema 1 în cazul sistemelor de ecuații neliniare, rezultînd astfel o teoremă de convergență pentru sisteme. Fie $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ funcții reale de m variabile reale. Luăm $X = Y = R^m$, R fiind mulțimea numerelor reale și

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \in R^m, \; P(x) = \begin{pmatrix} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \\ \vdots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \end{pmatrix} \in R_m.$$

Considerăm următoarea matrice diagonală

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{D_1 f_1(x)} & O & \dots & O \\ O & \frac{1}{D_2 f_2(x)} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & \frac{1}{D_m f_m(x)} \end{pmatrix},$$

unde $D_i f_i(x)$ este derivata parţială a funcţiei $f_i(x)$ în raport cu ξ_i. Această matrice poate fi considerată ca un operator definit pe R^m cu valori în R^m. Luînd $M(x) = \Delta(x)$, metoda de tip Newton pentru sistemul de ecuaţii $f_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \dots m$ va avea forma

$$x_{n+1} = x_n - \Delta(x_n) P(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

unde x_n este vectorul coloană cu elementele $\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_m^n \in R$.

TEOREMA 2. *Presupunem îndeplinite condiţiile* (2), (3) *şi mai presupunem că matricea*

$$P'(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) & \dots & D_m f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) & \dots & D_m f_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(x) & D_2 f_m(x) & \dots & D_m f_m(x) \end{pmatrix}$$

are o transpusă cu diagonala strict dominantă, adică pentru orice $x \in \Omega_0$ *şi orice* $j \leq m$, *avem*

$$\sum_{i=1}^{m} |D_i f_j(x)| - |D_j f_j(x)| < |D_j f_j(x)|.$$

În aceste condiţii dacă există un număr $b > 0$ *astfel ca* $|D_i f_i(x)| \geq b$ *pentru orice* $x \in \Omega_0$, $i = 1, 2, \dots, m$ *şi are loc* (5) *şi* (6) *cu* $B = \frac{1}{b}$, *atunci are loc* (1) *şi* (4) *pentru* $M(x) = \Delta(x)$, *adică concluziile teoremei 1 se menţin pentru sistemul* $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Demonstraţie. E suficient să arătăm că pentru orice $x \in \Omega_0$ avem

$$\|\Delta(x)\| \leq B = \frac{1}{b} \quad \text{şi} \quad \|I - P'(x)\,\Delta(x)\| \leq \delta < 1.$$

În adevăr

$$\|\Delta(x)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{1}{D_i f_i(x)} \right| \leq \frac{1}{b} = B.$$

Dacă I este matricea unitate din R^n, obţinem

$$P'(x)\,\Delta(x) - I = \begin{pmatrix} O & \frac{D_2 f_1(x)}{D_2 f_2(x)} & \frac{D_3 f_1(x)}{D_3 f_3(x)} & \dots & \frac{D_m f_1(x)}{D_m f_m(x)} \\ \frac{D_1 f_2(x)}{D_1 f_1(x)} & O & \frac{D_3 f_2(x)}{D_3 f_3(x)} & \dots & \frac{D_m f_2(x)}{D_m f_m(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{D_1 f_m(x)}{D_1 f_1(x)} & \frac{D_2 f_m(x)}{D_2 f_2(x)} & \frac{D_3 f_m(x)}{D_3 f_3(x)} & \dots & O \end{pmatrix}.$$

Luind acum $\delta = \| P'(x)\,\Delta(x) - I \|$, rezultă

$$\delta = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{D_i f_j(x)}{D_j f_j(x)}\right| - 1\right] = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\frac{1}{D_j f_j(x)}\right|\left[\sum_{i=1}^{n}|D_i f_j(x)| - |D_j f_j(x)|\right] <$$

$$< \max_{j}\left|\frac{1}{D_j f_j(x)}\right| |D_j f_j(x)| = 1.$$

Aşadar teorema este demonstrată.

Observaţia 2. Deficienţa teoremelor 1 şi 2 este aceea că asigurăm numai o convergenţă liniară (adică aceea a unei progresii geometrice), pe cînd pentru metoda lui Newton această teoremă asigură o convergenţă de ordin superior. Această deficienţă va fi remediată de teorema următoare. În prealabil vom repeta o definiţie dată în lucrarea [1].

Definiţie. *Considerăm şirul $\{x_n\}$ în spaţiul Banach X, convergent către $x^* \in X$.*

Dacă există un număr real şi pozitiv p şi *o constantă $C \neq 0$ astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^p} = C,$$

atunci spunem că şirul $\{x_n\}$ este convergent de ordinul p, iar C se numeşte constanta asimptotică a erorii.

Evident în cazul unei metode iterative vorbim despre ordinul de convergenţă al şirului de numere care delimitează eroarea.

TEOREMA 3. *Presupunem îndeplinite condiţiile* (1), (2), (3) *şi încă* (4.2) *pentru funcţia* $\delta(x) = \|I - P'(x)\,M(x)\|$ *avem* $\delta(x_0) < 1$ *şi pentru* $p \in [1, 2]$ *şirul* $\{x_n\}$ *dat de* $x_{n+1} = x_n - M(x_n)\,P(x_n)$ *este astfel că*

$$\delta_{n+1} \leqslant \delta_n^p \text{ unde } \delta_n = \delta(x_n).$$

(5.2) $$h = \frac{B^2 K\eta}{1 - \delta_0} < 2.$$

(6.2) $S(x_0, r') \subset \Omega_0$, *unde* $r' = B\eta\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{2p^{k-1}-1}\right)$ *şi* $\alpha = \delta_0 + (1 - \delta_0)\,\frac{h}{2}$.

În aceste ipoteze şirul $\{x_n\}$ converge către $x^* \in S(x_0, r')$, $P(x^*) = 0$ şi

$$\|x_n - x^*\| < B\eta \frac{\alpha^{2p^{n-1}-1}}{1 - \alpha^{(p-1)2p^{n-1}}}. \tag{12}$$

Demonstraţie. Se procedează ca şi la teorema 2 din [1]. Introducem următoarele notaţii

$$\eta_0 = \eta, \; h_0 = h, \; \alpha_0 = \alpha, \; \eta_{n+1} = \eta_n \alpha_n, \; h_n = \frac{B^2 K \eta_n}{1 - \delta_n}, \; \alpha_n = \delta_n + (1 - \delta_n) \frac{h_n}{2}.$$

Exact ca la teorema 1 folosindu-ne de (8) se arată că

$$\|P(x_n)\| \leqslant \eta_{n-1} \alpha_{n-1} = \eta_n, \tag{13}$$

pentru orice $x_n \in \Omega_0$.

Pentru numerele α_n se obţin, avînd în vedere (4.2) inegalităţile

$$\alpha_n < \alpha_{n-1}^p < (\alpha_{n-1}^p)^p < \ldots < \alpha_0^{p^n}.$$

Cu ajutorul inegalităţii $\alpha_n < \alpha_0^{p^n}$ se demonstrează prin inducţie matematică relaţia

$$\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_0^{p^i} \leqslant \alpha_0^{2p^{n-1}-1}. \tag{14}$$

Urmează de aici că

$$\begin{aligned} \eta_n &= \eta_{n-1}\alpha_{n-1} = \ldots = \eta_0 \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} = \\ &= \eta_0 \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i < \eta_0 \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_0^{p^i} \leqslant \eta_0 \alpha_0^{2p^{n-1}-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Arătăm acum că termenii şirului $\{x_n\}$ aparţin sferei $S(x_0, r')$

$$\|x_1 - x_0\| = \|-M(x_0)P(x_0)\| \leqslant B\eta < B\eta\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2p^{k-1}-1}\right) = r',$$

adică $x_1 \in S(x_0, r')$.

Presupunînd că $x_k \in S(x_0, r')$ pentru $k \leqslant n$, obţinem din (15)

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leqslant B \sum_{k=0}^{n} \eta_k = B\eta_0 + B \sum_{k=1}^{n} \eta_k < B\eta + B\eta \sum_{k=1}^{n} \alpha_0^{2p^{k-1}-1} \leqslant \\ &\leqslant B\eta\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_0^{2p^{k-1}-1}\right) = r', \end{aligned} \tag{16}$$

ceea ce arată că $x_{n+1} \in S(x_0, r')$.

În continuare avem

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leqslant B \sum_{i=n}^{n+k-1} \eta_i < B\eta \sum_{i=n}^{n+k-1} \alpha_0^{2p^{i-1}-1} = B\eta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_0^{2p^{n+j-1}-1}, \tag{17}$$

care arată că şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy şi în ipotezele noastre convergent către un element x^*.
Din (16) se obţine că $x^* \in S(x_0, r')$, iar din (17) pentru $k \to \infty$ avem

$$\|x_n - x^*\| < B\eta \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_s^{2p^{n+j-1}-1} < B\eta \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_s^{2p^{n-1}-1+2p^{n-1}(p-1)j} =$$

$$= B\eta\, \alpha_s^{2p^{n-1}-1} \sum_{j=0}^{\infty} [\alpha_s^{2p^{n-1}(p-1)}]^j = B\eta \frac{\alpha_s^{2p^{n-1}-1}}{1 - \alpha_s^{2p^{n-1}(p-1)}}.$$

Ultima inegalitate este tocmai relaţia (12) de demonstrat. Ca şi la teorema 1 se arată că x^* este soluţie a ecuaţiei $P(x) = 0$.

Consecinţa 1. În ipotezele teoremei 3 şirul erorilor delimitatoare ale metodei iterative $x_{n+1} = x_n - M(x_n)P(x_n)$, adică şirul cu termenul general $b_n = B\eta \frac{\alpha^{2p^{n-1}-1}}{1 - \alpha^{(p-1)2p^{n-1}}}$ este convergent (către zero) de ordinul p.

Intr-adevăr avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1} - 0|}{|b_n - 0|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{[1 - \alpha^{(p-1)2p^{n-1}}]^p}{1 - \alpha^{(p-1)2p^n}} \frac{B\eta\alpha^{2p^n-1}}{B^p\eta^p(\alpha^{2p^{n-1}-1})^p} = \left(\frac{\alpha}{B\eta}\right)^{p-1} \neq 0$$

Consecinţa 2. Să presupunem că $M(x) = \Gamma_d(x)$ este inversul la dreapta a operatorului $P'(x)$, adică $P'(x)\,\Gamma_d(x) = I$, I fiind operaţia identică şi că $\Gamma_d(x)$ există pentru orice $x \in \Omega_0$ şi $\|\Gamma_d(x)\| \leq B$.

Deasemenea presupunem îndeplinite condiţiile (2) şi (3) şi încă

(5.3) $$h = B^2K\eta < 2,$$

(6.3) $$S(x_0, r'') \subset \Omega_0 \text{ unde } r'' = B\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1}.$$

În aceste ipoteze metoda iterativă $x_{n+1} = x_n - \Gamma_d(x_n)P(x_n)$ converge către un element $x^* \in S(x_0, r'')$, $P(x^*) = 0$ şi

$$\|x_n - x^*\| \leq B\eta \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2^n-1}}{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n}}. \tag{18}$$

Consecinţa rezultă imediat avînd în vedere că în aceste condiţii se verifică condiţia (4.2) cu $\delta(x) \equiv 0$ şi $p = 2$.

TEOREMA 4. *Presupunem îndeplinite condiţiile* (1), (2), (3), (4) *şi*

(5.4) $$h = \frac{B^2K\eta}{1-\delta} < 2,$$

(6.4) $$S(x_0, r''') \subset \Omega_0, \text{ unde } r''' = \frac{B\eta}{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1}.$$

Atunci operatorul $\Gamma_d(x)$ *există pentru orice* $x \in \Omega_0$ *și metoda iterativă* $x_{n+1} = x_n - \Gamma_d(x_n)P(x_n)$ *cu punctul inițial* x_0 *definește un șir de elemente în* $S(x_0, r''')$ *convergent către* $x^* \in S(x_0, r''')$, $P(x^*) = 0$ și

$$||x_n - x^*|| \leqslant \frac{B\eta}{1-\delta} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{2^n-1}}{1-\left(\frac{k}{2}\right)^{2^n}} .$$

Demonstrația este imediată. *Din* (4) urmează pe baza unei cunoscute teoreme că există operatorul invers $[P'(x)\, M(x)]^{-1}$ și norma sa este $||[P'(x) \cdot M(x)]^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-\delta}$. Rezultă acum că pentru orice $x \in \Omega_0$ există și operatorul

$$M(x)[P'(x)M(x)]^{-1} = \Gamma_d(x) \text{ și } ||\Gamma_d(x)|| \leqslant \frac{B}{1-\delta} .$$

Aplicînd acum consecința 2 obținem afirmațiile teoremei 4.

Subliniem în încheiere că teoremele expuse nu asigură în general unicitatea soluției ecuației $P(x) = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Dennis J. E. jr.: *On Newton-Like Methods*, Numerische Math., Nr. 11, p. 324—330 (1968).
2. Idem: *On Newton's method and nonlinear simultaneous displacements*, J. SIAM Numer. Anal. Ser. 4, 103—108 (1967).
3. Jankó, B., Coroian, I.: *Metoda Newton-Kantorovici pentru ecuații operaționale depinzînd de un parametru*, Studii și cercetări matematice, nr. 10, 1489—1495 (1968).
4. Kantorovici, L. V., Akilov, G. P.: *Functional analysis in normed spaces*, New-York, 1964.
5. Wertheim, A. V. *Ob usloviah primenenia metoda Niutona*, DAN, SSSR, 110, nr. 5, 719—722 (1956).

ON NEWTON-LIKE METHODS FOR NONLINEAR EQUATIONS.

(Abstract)

The paper investigates the iterative Newton-like methods $x_{n+1} = x_n - M_n(x)P(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, for the solving the equations $P(x) = 0$, where X, Y are Banach spaces, Ω is an open subset of X, $P: \Omega \to Y$ is a nonlinear operator, $M: \Omega_0 \to [Y \to X]$, Ω_0 is the closing of an open subset of Ω and $[Y \to X]$ is the set of linear bounded operators which transforms Y into X. In this paper are given similar theorems with those from [1, 2] without to suppose that exists $P''(x)$ — the second derivative of $P(x)$ in Fréchet's sense.