ASUPRA FOCARELOR UNEI CUADRICE

de

VASILE DAVID.

DEFINIȚIA FOCARELOR UNEI CUADRICE.

Dintre definițiile curente date focarelor unei conice, amintim două:

1. Numim focar al unei conice, centrul cercului de rază nulă, bitangent conicei date.

2. Un punct F este focar al unei conice, dacă tangentele duse din acel punct la conică sînt dreptele izotrope corespunzptoare acelui punct. Ambele definiții conduc la focare unice pentru conice.

Prin analogie cu aceste definiții, se definesc și focarele unei cuadrice în două feluri:

1. Se numește focar al unei cuadrice, centrul unei sfere de rază nulă, bitangentă cuadricei date: [1]; [2].

2. Se numește focar al unei cuadrice, vîrful conului izotrop circumscris acelei cuadrice [3].

Pornind de la prima definiție, se ajunge la următoarele rezultate, aflate în tratatele [1] și [2]:

Fiecare cuadrică are ca loc geometric al focarelor anumite curbe numite curbe focale, după cum urmează:

Elipsoidul:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

are următoarele curbe focale:

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0;\quad z=0$$

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}-1=0;\quad x=0$$

$$\frac{z^2}{c^2-b^2}+\frac{x^2}{a^2-b^2}-1=0;\quad y=0$$

Dintre acestea, una este o elipsă reală, alta este elipsă imaginară și alta este hiperbolă.

Hiperboloidul cu o pînză:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

are următoarele curbe focale:

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}-1=0\,; \quad z=0$$

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{-c^2-a^2}-1=0\,; \quad x=0$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{y^2}{-b^2-c^2}-1=0\,; \quad y=0$$

Două elipse (una reală, una imaginară) și o hiperbolă.

Hiperboloidul cu două pînze:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

are drept focare punctele conicelor:

$$\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}-1=0\,; \quad x=0$$

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}+1=0\,; \quad z=0.$$

$$\frac{x^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{b^2+c^2}-1=0\,; \quad y=0$$

Paraboloidul:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

are focarele așezate pe conicele focale:

$$y^2=(p-q)(2z-p)\,; \qquad x=0$$

$$x^2=(-p+q)(2z-q)\,; \qquad y=0$$

În cursurile de geometrie analitică amintite se află și proporietățile acestor curbe focale.

A doua definiție a focarelor unei cuadrice, amintită la început, este:

Numim focar al unei cuadrice, vîrful conului izotrop circumscris acelei cuadrice. [3]

Lucrarea citată pentru această definiție nu are drept scop analizarea amănunțită a cazurilor cînd asemenea focare există.

Ne propunem să analizăm aceasta în lucrarea de față.

Această definiție este echivalentă cu următoarea:

Dîndu-se suprafața:

(1) $$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + 2\, a_1 x + 2\, a_2 y + 2\, a_3 z + a = 0$$

unde au notat:

(2) $$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz + a_{33}z^2,$$

să determinăm locul geometric al punctului $M(x_0, y_0, z_0)$ pentru care conul tangentelor duse din el la cuadrica (1) este chiar conul izotrop corespunzător acelui punct:

(3) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

și să numim acele puncte, focare ale cuadricei date.

După cum se știe, ecuația conului tangent la cuadrica (1) cu vîrful în $M\ (x_0, y_0, z_0)$, are ecuația

(4) $$\left[(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z_0}\right]^2 - 4\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\cdot f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Pentru rezolvarea problemei propuse, vom pune condiția ca ecuațiile (3) și (4) să reprezinte aceeași suprafață, adică să aibă coeficienții lui $(x - x_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(z - z_0)^2$, $(x - x_0)(y - y_0)$, $(x - x_0)(z - z_0)$, $(y - y_0)(z - z_0)$, $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ și termenii liberi proporționali.

Vom trata această problemă pentru fiecare din cuadrice, dată prin ecuația canonică.

I. ELIPSOIDUL.

Ecuația sa canonică este:

(5) $$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{2x_0}{a^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y_0} = \frac{2y_0}{b^2}$; $\frac{\partial f}{\partial z_0} = \frac{2z_0}{c^2}$.

În acest caz, ecuația (4) devine, după simplificarea cu 4:

$$\left[(x - x_0)\frac{x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{y_0}{b^2} + (z - z_0)\frac{z_0}{c^2}\right]^2 - \left[\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2}\right]\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) = 0 \text{ sau}$$

(6) $$(x - x_0)^2\left(-\frac{y_0^2}{a^2b^2} - \frac{z_0^2}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + (y - y_0)^2\left(-\frac{x_0^2}{a^2b^2} - \frac{z_0^2}{b^2c^2} + \frac{1}{b^2}\right) + (z - z_0)^2\left(-\frac{x_0^2}{a^2c^2} - \frac{y_0^2}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 2(x - x_0)(y - y_0)\frac{x_0y_0}{a^2b^2} + 2(y - y_0)(z - z_0)\frac{y_0z_0}{b^2c^2} + 2(z - z_0)(x - x_0)\frac{z_0x_0}{c^2a^2} = 0$$

Pentru ca ecuațiile (6) și (3) să reprezinte aceeași suprafață, trebuie să avem:

(7) $$-\frac{y_0^2}{a^2b^2} - \frac{z_0^2}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{x_0^2}{a^2b^2} - \frac{z_0^2}{b^2c^2} + \frac{1}{b^2} = -\frac{x_0^2}{a^2c^2} + \frac{1}{c^2}$$

și

(8) $$x_0y_0 = 0\,;\; y_0z_0 = 0\,;\; x_0z_0 = 0$$

Din sistemul de ecuații (8) obținem următoarele condiții:

(9) $$y_0 = 0\,;\; z_0 = 0 \text{ sau}$$

(10) $$x_0 = 0\,;\; z_0 = 0 \text{ sau}$$

(11) $$y_0 = 0\,;\; z_0 = 0$$

Din relațiile (7) și (9) obținem:

$$-\frac{x_0^2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2} = -\frac{x_0^2}{a^2c^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} \text{ de unde avem:}$$

(12) $$x_0^2 = a^2 - b^2 \text{ și } x_0^2 = a^2 - c^2$$

Pentru ca relațiile (12) să fie posibile, este necesar să avem: $b = c$

Acest rezultat ne spune că elipsoidul de rotație:

(13) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$$

are focarele: $F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$ și $F_1'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$. Mulțimea tangentelor duse din aceste puncte la suprafața (13), formează conurile izotrope corespunzătoare acestor puncte. Focarele F_1 și F_1' sînt reale sau imaginare, după cum $a > b$ sau $a < b$.

Din relațiile (7) și (10) se deduce în mod asemănător, că elipsoidul de rotație:

(14) $$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ are focarele:}$$

$F_2(0, \sqrt{b^2 - a^2}, 0)$ și $F_2'(0, -\sqrt{b^2 - a^2}, 0)$ care se bucură de aceeași proprietate cu F_1 și F_1' — Ele sînt reale sau imaginare după cum $b > a$ sau $b < a$.

În același fel se deduce, din relațiile (7) și (11) că elipsoidul:

(15) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ are focarele: } F_3(0, 0, \sqrt[3]{c^2 - a^2})$$

și $$F_3'(0, 0, -\sqrt{c^2 - a^2})$$

Ele sînt reale sau imaginare, după cum $c > a$ sau $c < a$

În concluzie: Elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, dacă este un elipsoid de revoluție, are două focare, care se bucură de proprietatea că conul tangentelor duse din oricare din aceste puncte la cuadrică este conul izotrop corespunzător acestui punct.

Dacă vom numi aceste puncte focare, vom deduce că elipsoidul de rotație, are două asemenea focare reale dacă a luat naștere prin rotația unei elipse în jurul axei mari, și 2 focare imaginare dacă a luat naștere prin rotația elipsei în jurul axei mici.

II. HIPERBOLOIDUL CU O PÎNZĂ

(16) $$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

în jurul axei oz

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{2x_0}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_0} = \frac{2y_0}{b^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} = \frac{-2z_0}{c^2}.$$

Ecuația conului tangent, avînd vîrful în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este

(17) $$\left[(x - x_0)\frac{x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{y_0}{b^2} - (z - z_0)\frac{z_0}{c^2}\right]^2 - \left[\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2}\right] \cdot \left[\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right] = 0.$$

Procedînd ca în cazul elipsoidului, se primesc relațiile:

(18) $$\begin{cases} x_0 y_0 = 0 \\ x_0 z_0 = 0 \\ y_0 z_0 = 0 \end{cases}$$

(18) $$\frac{-y_0^2}{a^2 b^2} + \frac{z_0^2}{a^2 c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{x_0}{a^2 b^2} + \frac{z_0^2}{b^2 c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{-x_0^2}{a^2 c^2} + \frac{y_0^2}{b^2 c^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Ori, sistemul (18) este imposibil, ceea ce ne arată că hiperboloidul cu o pînză nu are asemenea focare.

III. HIPERBOLOIDUL CU DOUĂ PÎNZE

Fie hiperboloidul

(19) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

în jurul axei oz și punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Condițiile de mai sus, ne duc în acest caz la următoarele relații:

$$(20)\quad \begin{cases} x_0 y_0 = 0 \\ x_0 z_0 = 0 \\ y_0 z_0 = 0 \\ \dfrac{y_0^2}{a^2b^2} + \dfrac{z_0^2}{a^2c^2} - \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{x_0^2}{a^2b^2} + \dfrac{z_0^2}{b^2c^2} - \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2c^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2}. \end{cases}$$

Care ne dau singurele soluții:

$$x_0 = 0;\ y_0 = 0,\ z_0 = \pm\sqrt{a^2 + c^2}$$

cu condiția: $a = b$.

Deci hiperboloidul cu două pînze:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

de rotație în jurul lui oz

are focarele: $\quad F_1(0,0,\ \sqrt{a^2 + c^2});\ \ F_2(0,0,\ -\sqrt{a^2 + c^2})$

Rezultate asemănătoare se primesc pentru un hiperboloid de rotație în jurul altei axe.

IV. PARABOLOIDUL ELIPIC:

Fie suprafața

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

și $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un focar al său.

Condițiile din cazurile anterioare ne duc la sistemul:

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= 0 \\ x_0 z_0 &= 0 \\ x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ \frac{2z_0}{a^2} = \frac{2z_0}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Din aceste relații rezultă condiția: $a = b$ și în acest caz paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 2z = 0$$

de rotație în jurul axei oz, are focarul:

$$F\left(0,0,\ \frac{a^2}{2}\right).$$

V. PARABOLOIDUL HIPERBOLIC

Fie suprafaţa:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un focar al său

Condiţia ca M_0 să fie un focar, ne duce la relaţiile:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\frac{2z_0}{a^2} = -\frac{2z_0}{b^2} = 1$$

ultima fiind o relaţie imposibilă.

Deci paraboloidul hiperbolic nu are asemenea focare.

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Niewenglowski: Cours de Géométrie Analytique
[2] N. Avramescu: Lecţiuni de Geometrie Analitică
[3] N. Mihăileanu: Elemente de geometrie proiectivă

SUR LES FOYERS D'UNE QUADRIQUE

Résumé

Par analogie avec la définition des foyers des coniques, on considère les définitions suivantes des foyers d'une quadrique:

a. On appelle foyer d'une quadrique le centre d'une sphère de rayon nul, bitangente à la quadrique donnée: [1], [2]

b. On appelle foyer d'une quadrique, le sommet du cône isotrope circonscrit à la quadrique respective. [3]

La première définition conduit à certaines courbes focales, pour chaque des quadriques.

Le but du présent ouvrage c'est de montrer que, si l'on part de la seconde définition du foyer, pas toutes les quadriques admettent de tels foyers, mais seulement l'ellipsoïde de rotation, l'hydroboloïde à deux nappes de rotation et le paraboloïde elliptique de rotation.

Les foyers de ces quadriques sont uniques.