# PROPRIETĂȚI ALE UNUI SIMPLEX

de

AUREL IOANOVICIU

Fie $A^r = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ un simplex al spațiului euclidian $R^n(r \leqslant \leqslant n)$. Numim *centru de greutate* al simplexului $A^r$ punctul

$$(1) \qquad g = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_r}{r+1} = \frac{A}{r+1}.$$

Punctul $g$ aparține evident simplexului $A^r$, întrucît toți coeficienții punctelor $a_i$ sînt pozitivi, iar suma lor este 1.

Numim încă *față opusă* vîrfului $a_i$, fața $A_i^{r-1} = (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r)$; deasemenea vom spune despre două fețe $C^s$, $B^t$ că sînt *fețe opuse*, dacă ele nu au nici un vîrf comun, dar ansamblul lor conține toate vîrfurile simplexului $A^r$. Numim *mediană* a unui simplex segmentul care are o extremitate într-unul din vîrfurile simplexului și cealaltă extremitate în centrul de greutate al feței opuse. Evident un simplex $A^r$ are $r+1$ mediane.

TEOREMA 1. *Medianele unui simplex sînt concurente în centrul de greutate al simplexului, care împarte mediana în raportul*

$$\frac{\rho(g, g_i)}{\rho(g, a_i)} = \frac{1}{r}.$$

*Demonstrație.* Fie $a_i$ unul din vîrfurile simplexului și

$$g_i = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_r}{r} = \frac{A_i}{r}$$

centrul de greutate al feței opuse vîrfului $a_i$. Un punct oarecare de pe segmentul $(a_i, g_i)$ poate fi scris sub forma:

$$x = (1 - s)\, a_i + s g_i, \; 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Pentru $s = s_0 = \frac{r}{r+1}$ obținem un punct $x_0$ de pe segmentul $(a_i, g_i)$, întrucît $0 < s_0 < 1$. Avem:

$$x = \left(1 - \frac{r}{r+1}\right) a_i + \frac{r}{r+1} g_i = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_r}{r+1} = g.$$

Avem încă:

$$\frac{\rho(g, g_i)}{\rho(g, a_i)} = \sqrt{\frac{\left[\frac{A_i}{r} - \frac{A}{r+1}\right]^2}{\left[a_i - \frac{A}{r+1}\right]^2}}.$$

Făcînd calculele și ținînd seama de relația $a_i + A_i = A$, obținem:

$$\frac{(g, g_i)}{(g, a_i)} = \frac{1}{r}.$$

Teorema următoare reprezintă un rezultat mai general. Dacă $B^s$ și $C^t$ sînt două fețe opuse ($s + t = r - 1$) și $k$ este cel mai mic dintre numerele $s + 1$, $t + 1$, vom numi $k$-mediană (polimediană) segmentul $(g_s, g_t)$, $g_s$ și $g_t$ fiind centrele de greutate ale simplexelor $B^s$, $C^t$.

TEOREMA 2. *Toate polimedianele unui simplex sînt concurente în centrul de greutate al simplexului care împarte fiecare polimediană în raportul*

$$\frac{\rho(g, g_s)}{\rho(g, g_t)} = \frac{t+1}{s+1}.$$

*Demonstrație.* Fie $B^s = (a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_s})$, $C^t = (a_{\alpha_{s+1}}, \ldots, a_{\alpha_r})$ două fețe opuse ale simplexului $A^r$ și $g_s$, $g_t$ respectiv centrele lor de greutate, unde

$$g_s = \frac{a_{\alpha_0} + a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_s}}{s+1} = \frac{A_{s+1}}{s+1},$$

$$g_t = \frac{a_{\alpha_{s+1}} + \ldots + a_{\alpha_r}}{r-s} = \frac{A_{r-s}}{r-s} = \frac{A_{r-s}}{t+1}.$$

Un punct oarecare $x$ de pe segmentul $(g_s, g_t)$ poate fi scris sub forma:

$$x = (1-u)g_s + ug_t, \quad 0 < u < 1.$$

Punctul $x = x_0$ corespunzător valorii $u = u_0 = \frac{r-s}{s+1}$, aparține segmentului $(g_s, g_t)$ întrucît $0 < u_0 < 1$. Avem:

$$x_0 = (1-u_0)g_s + u_0 g_t = \frac{s+1}{r+1}g_s + \frac{r-s}{r+1}g_t = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_r}{r+1} = g,$$

deci polimediana $(g_s, g_t)$ trece prin centrul de greutate $g$ al simplexului $A^r$. Avem deasemenea:

$$\frac{\rho(g, g_s)}{\rho(g, g_t)} = \sqrt{\frac{\left[\frac{A_r}{r+1} - \frac{A_{s+1}}{s+1}\right]^2}{\left[\frac{A_r}{r+1} - \frac{A_{r-s}}{r-s}\right]^2}} = \frac{r-s}{s+1} = \frac{t+1}{s+1}.$$

D e f i n i ţ i e. *Un vector $z$ este ortogonal unui simplex $A^r$, $r \leq n$, dacă este ortogonal cu $r$ vectori independenţi din $A^r$. Vectorii $z$ îi numim vectori normali ai simplexului $A^r$.*

Pentru a arăta că această definiţie este corectă, trebuie să demonstrăm că dacă un vector $z$ este ortogonal cu $r$ vectori independenţi din $A^r$, atunci el este ortongonal oricărui alt vector din simplexul $A^r$.

Pentru aceasta, fie $x_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ un sistem de $r$ vectori independenţi şi $x$ un vector oarecare din $A^r$. Fie $z$ un vector ortogonal vectorilor $x_\alpha$, deci satisfăcînd condiţiilor:

$$zx_\alpha = 0. \tag{2}$$

Să demonstrăm că aceste condiţii atrag după sine relaţia:

$$zx = 0. \tag{3}$$

Întrucît într-un $A^r$ există cel mult $r$ vectori independenţi, orice vector $x$ poate fi exprimat liniar în funcţie de $x_\alpha$. Deci:

$$x = \lambda^\alpha x_\alpha, \tag{4}$$

unde $\lambda^\alpha$ sînt numere reale satisfăcînd condiţiilor:

$$\lambda^\alpha \geq 0,\ \lambda^1 + \lambda^2 + \ldots + \lambda^r = 1.$$

Înlocuind (4) în (3), avem:

$$zx = z(\lambda^\alpha x_\alpha),$$

care pe baza distributivităţii produsului scalar se poate scrie:

$$zx = \lambda^\alpha(zx_\alpha),$$

de unde rezultă ţinînd seama de (2):

$$zx = 0.$$

Întrucît $z$ este un vector arbitrar din $R^n$, direcţia lui depinde de $n - 1$ constante arbitrare; relaţiile (2) determină $r$ dintre aceste constante, deci $z$ depinde de $n - r - 1$ parametri. Rezultă că un simplex $A^r$ dintr-un spaţiu $R^n$ are o infinitate de ordinul $n - r - 1$ de normale. În particular, dacă $r = n - 1$, deci dacă avem un simplex $A^{n-1}$ din $R^n$, acesta admite o singură normală. În cazul $r = n$ avem un sistem de $n$ ecuaţii independente cu $n - 1$ necunoscute, care nu admite soluţii; deci un simplex $A^n$ din $R^n$ nu admite normală.

## B I B L I O G R A F I E


1. P o n t r e a g h i n, L. S. *Introducere în topologia combinatorie*



Résumé

## P R O P R I É T É S  D'U N  S I M P L E X E

On introduit les notions de médiane, polimédiane et vecteur normal dans un simplexe $A^r$ de l'espace euclidien à $n$ dimension $R^n$. Ensuite on démontre quelques propriétés d'un simplexe concernant ces éléments.