# ASUPRA METODELOR CONVERGENTE DE ORDINUL TREI APLICATE LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINEARE

de

A. GAIDICI

Fie ecuația

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită într-un domeniu $S$ complet și convex al spațiului liniar normat $X$ și cu valori în spațiul $Y$ de același tip. Mai presupunem că operația $P(x)$ este continuă și admite derivate în sens Fréchet pînă la ordinul trei inclusiv

Considerăm metoda de iterație [1]

$$x_{n+1} = x_n - [I + \alpha A_n]^{-1} [I + (1 + \alpha) A_n] \Gamma_n P](x_n) \tag{2}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n - [I + (I - \lambda A_n)^{-1} A_n] \Gamma_n P(x_n) \tag{3}$$

unde $\lambda$ este un număr real iar

$$\Gamma_n = [P'_{(x_n)}]^{-1} \text{ și } A_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''_{(x_n)} \Gamma_n P_{(x_n)}.$$

În lucrarea [1] se demonstrează existența soluției $x^* = \lim x_n$ a ecuației (1) prin aplicarea metodei (2), dar din teoremele și evaluările respective nu rezultă cazurile particulare ce se obțin pentru diferitele valori ale lui $\lambda$.

În cele ce urmează vom stabili cîteva teoreme ce se referă la existența soluției $x^* = \lim x_n$ a ecuației (1) precum și la convergența metodei (3), obținînd unele rezultate cunoscute.

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţial iniţaiă $x_0$ sînt îndeplinite următoarele condiţii: există operaţia inversă $\Gamma_0 = [P'_{(x_0)}]^{-1}$ şi are loc delimitarea*

$$1^\circ \qquad ||\Gamma_0|| \leqslant B_0$$

$$2^\circ \qquad ||\Gamma_0 P(x_0)|| \leqslant \eta_0$$

$$3^\circ \qquad ||P''_{(x)}|| \leqslant M, \; ||P'''_{(x)}|| < N, \; x \in S\left(x_0, \frac{\eta_0}{h_0}\right)$$

$$4^\circ \qquad h_0 = B_0 M \eta_0 \begin{cases} < \dfrac{\sqrt{(2-|\lambda|)^2+8}-(2+|\lambda|)}{2|1-\lambda|}, & |\lambda| \neq 1 \\[2ex] < \dfrac{2}{3}, & |\lambda| = 1 \end{cases}$$

$$5^\circ \qquad E_0 h_0 < 1$$

*unde*

$$E_n^2 = \frac{1}{H_n^2}\left[\frac{|1-\lambda|\,(2-|\lambda|)\,h_n-(1-|\lambda|)\,h_n+2}{2(2-|\lambda|\,h_n)^2}+\frac{N[2+(1-\lambda)h_n]}{6B_n M^2(2-|\lambda|\,h)^2}\right]$$

şi

$$H_n = 1 - h_n\left(1+\frac{k}{2-|\lambda|\,h_n}\right)$$

*atunci ecuaţia* (1) *admite cel puţin o soluţie* $x^* \in S\left(x_0, \frac{\eta_0}{h_0}\right)$, $x^*$ *fiind limita şirului* $\{x_n\}$ *dat de formula* (3). *Rapiditatea convergenţei este caracterizată de relaţia*

$$||x^* - x_n|| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0}(E_0\,h_0)^{2n-1} H_0^n \tag{4}$$

*Demonstraţie.* Arătăm că pentru aproximaţia $x_1$ condiţiile $1^\circ - 5^\circ$ se menţin.

a) Din (3), condiţiile $1^\circ - 4^\circ$ şi teorema lui Banach rezultă

$$||x_1 - x_0|| \leqslant \left(1+\frac{h_0}{2-|\lambda|\,h_0}\right)\eta_0 \tag{5}$$

apoi aplicînd teorema generalizată al lui Lagrange şi (5) obţinem

$$||\Gamma_0(P'_{(x_0)} - P'_{(x_1)})|| \leqslant B_0\,M\,||x_1 - x_0|| \leqslant h_0\left(1+\frac{h_0}{2-|\lambda|\,h_0}\right) < 1. \tag{6}$$

Considerăm operatorul $R_0 = [I - \Gamma_0(P'_{(x_0)} - P'_{(x_1)})]^{-1}$ pentru care $||R_0|| \leqslant \frac{1}{H_0}$. Pe de altă parte avem $\Gamma_1 = R_0\,\Gamma_0$

deci

$$||\Gamma_1|| \leqslant \frac{B_0}{H_0} = B_1, \quad B_0 < B_1 \tag{7}$$

Înainte de aplicarea formulei generalizate a lui Taylor

$$\left\| P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sup \|P'''(\bar{x})\|}{3!} \|x_1 - x_0\|^3 \tag{8}$$

avem nevoie de evaluarea expresiei

$$L_0 = P(x_0) + P(x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2$$

care, ținînd seama de (3) pentru $n = 0$, devine

$$L_0 = \frac{1-\lambda}{2} P''(x_0) \{\Gamma_0 P(x_0)\} \{(I - \lambda A_0)^{-1} A_0 \Gamma_0 P(x_0)\} -$$

$$- \frac{1}{2} P''(x_0) \{(I - \lambda A_0)^{-1} A_0 \Gamma_0 P(x_0)\} \{x_1 - x_0\}. \tag{9}$$

Din (8), (9) și condițiile $1^\circ - 5^\circ$ deducem

$$\|P(x_1)\| \leqslant \frac{(E_0 h_0 H_0)^2 \eta_0}{B_0}. \tag{10}$$

b) Evaluarea expresiei $\eta_1 = \|\Gamma_1 P(x_1)\|$ rezultă din (7) și (10)

$$\eta_1 \leqslant (E_0 h_0)^2 H_0 \eta_0 < \eta_0 \tag{11}$$

c) Din (7) și (11) avem pentru $h_1 = B_1 M \eta_1$

$$h_1 \leqslant (E_0 h_0)^2 h_0 < h_0 \quad \text{sau} \quad h_1 \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^3 \tag{12}$$

d) Ținînd seama că $h_1 < h_0$, $B_0 < B_1$ și $H_0 < H_1$ rezultă $E_1^2 < E_0^2$. Așadar condițiile $1^0 - 5^0$ ale teoremei rămîn valabile pentru aproximația $x_1$.

Prin inducție completă se demonstrează inegalitățile

$$B_n \leqslant \frac{B_0}{H_0^n}, \ \eta_n \leqslant (E_0 h_0)^{3^n - 1} H_0^n \eta_0, \quad h_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^{3^n}. \tag{13}$$

Din (3) rezultă

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_n}{2 - |\lambda| h_n}\right) \eta_n \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) \eta_n. \tag{14}$$

De unde deducem că

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) \leqslant (\eta_n + \eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+p-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) H_0^n \eta_0 \frac{1 - H_0^p}{1 - H_0}. \tag{15}$$

Făcînd aici $p \to \infty$ rezultă inegalitatea (4). Din faptul că $S$ este complet rezultă și existența limitei $x^* = \lim x_n$. Rămîne să arătăm că $x^*$ este soluția ecuației (1). Analog ca pentru (10) obținem

$$\|P(x_n)\| \leqslant \frac{(E_{n-1} h_{n-1} H_{n-1})^2 \eta_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

Dacă $n \to \infty$, pe baza relațiilor (13) și (16) avem $\lim \|P(x_n)\| = 0$ iar din continuitatea lui $P(x)$ și ținînd seama că $\lim x_n = x^*$ rezultă $P(x^*) = 0$. În continuare demonstrăm că aproximațiile $x_n$ rămîn în sfera considerată $S\left(x_0, \frac{\eta_0}{h_0}\right)$. Într-adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) \eta_0 (1 + H_0 + \ldots + H_0^{n-1}) < \frac{\eta_0}{h_0}.$$

TEOREMA 2. *Dacă sînt îndeplinite condițiile:*

1°. *există* $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ *astfel ca* $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S(x_0, r)$ *unde*

$$r = \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) H \eta_0 \quad \text{și} \quad H = \sum_{i=0}^{\infty} (G_0 h_0)^{2^i - 1}$$

2°. $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$

3°. $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant N$

4° $h_0 = BM\eta_0 < \frac{2}{|\lambda|}$

5° $G_0 h_0 < 1$ unde

$$G_n^2 = \frac{|1 - \lambda| (2 - |\lambda| h_n) + (1 - |\lambda|) h_n + 2}{2(2 - |\lambda| h_n)^2} + \frac{N[2 + (1 - |\lambda|) h_n]}{6 B M^2 (2 - |\lambda| h_n)^3}$$

atunci ecuația (1) admite cel puțin o soluție $x^* \in S(x_0, r)$. Rapiditatea convergenței este dată de relația

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2 - |\lambda| h_0}\right) H \eta_0 (G_0 h_0)^{2^n - 1}. \tag{17}$$

Demonstrația este analogă cu cea a teoremei precedente.

TEOREMA 3. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1°, 2°, 4° *și* 5° *(în care se înlocuiește* $N$ *prin* $K$*) ale teoremei* (1) *iar* 3° *este o condiție de tip Lipschitz, adică*

$$3° \; \|P''(x)\| \leqslant M, \; \|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant K \|x' - x''\|, \; x', x'' \in S(x_0, r)$$

*atunci ecuația* (1) *are cel puțin o soluție* $x^* \in S(x_0, r)$. *Rapiditatea convergenței este dată de o relație de forma* (4).

TEOREMA 4. *In condiţiile* 1°, 2°, 4 *şi* 5° *(N se înlocuieşte prin K) ale teoremei 2, iar condiţia* 3° *este aceeaşi ca şi în teorema 3, atunci ecuaţia* (1) *are cel puţin o soluţie* $x^* \in S(x_0, r)$. *Rapiditatea convergenţei este dată de o relaţie de forma* (17).

Demonstrarea teoremelor 3 şi 4 este analoagă cu cea a teoremelor 1 şi 2. În locul formulei (8) se întrebuinţează formula [2]

$$\|P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2\| \leq \frac{K}{3!} \|x_1 - x_0\|^3. \quad (18)$$

Observaţii :

1) Pentru $\lambda = 0, 1, 2$ regăsim rezultatele din [3], [4] şi [5]
2) Dacă în locul ecuaţiei (1) se consideră ecuaţia echivalentă

$$\tilde{P}(x) \equiv \Gamma_0(Px) = \theta \quad (1')$$

atunci expresiile ce intervin în condiţiile teoremelor respective sînt mai simple.

BIBLIOGRAFIE


[1] Каазик: Ю. Я. *Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений* Д. А. Н. СССР т. 112, 4, (1957)

[2] Верттайм: Б. А. *Об условиях применения метода Ньютона.* Д. А. Н. СССР т. 110,5 (1956)

[3] Janko B. şi Galdici A.: *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metoda lui Cebîşev.* Stud. şi Cerc. Mat. Tom. 18, 8, (1966)

[4] Janko B. şi Balazs M.: *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metoda hiperbolelor tangente generalizate. (II).* Stud. şi Cerc. Mat. Tom. 18, 6 (1966)

[5] Vohandu L.: *Interatsioonimeetodite varandite lahendamisel.* Dissertatsioon, Tartu, (1955)


ON CONVERGENT METHODS OF 3 ORDER FOR SOLVING NON-LINEAR OPERATIONAL EQAUTIONS.


Abstract.

The present paper is concerned to the study of solving operational equation $P(x) = 0$ by iterative methods where the operation $P(x)$ transforms the Banach space $X$ into $Y$ a space of the same type. We also suppose that $P(x)$ is continuous and admits Frechet derivatives to the 3 order, inclusively.

The algoritmus

$$x_{n+1} = x_n - [I + (I - \lambda A_n)^{-1} A_n] \Gamma_n P(x_n)$$

is applied, where by $\Gamma_n$ and $A_n$ the expressions $[P'(x^n)]^{-1}$ and $\frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$ are denoted. For $\lambda = 0, 1, 2$, the results from [3], [4] and [5] are obtained.