ECUAŢII ALGEBRICE TIP POMPEIU—ALACI

de A. IOANOVICIU

În două articole [1], [2], V. Alaci arată cum, plecînd de la unele observaţiuni ale lui D. Pompeiu [3], se pot rezolva o serie de ecuaţii algebrice de gradul al V-lea şi al VI-lea şi cum pot fi reduse ecuaţiile de gradul $2q$ la q şi cele de gradul $2q + r$ la $q + r$, dacă între coeficienţi există anumite relaţii.

În această lucrare îmi propun să generalizez ecuaţiile de tip Pompeiu—Alaci.

Teorema I. Ecuaţia:

$$A_0 x^{(n+1)(q+1)-2} + A_1 x^{(n+1)(q+1)-3} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-3}\, x + A_{(n+1)(q+1)-2} = 0, \tag{1}$$

unde $n \geqslant 1$ şi întreg, admite rădăcinile ecuaţiei:

$$x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1 = 0, \tag{2}$$

dacă sînt satisfăcute relaţiile:

$$\begin{aligned} A_q + A_{2q+1} + \ldots + A_{(j+1)(q+1)-1} + \ldots + A_{(n-1)(q+1)-1} + A_{n(q+1)-1} = \\ = A_k + A_{q+1+k} + \ldots + A_{j(q+1)+k} + \ldots + A_{(n-1)(q+1)+k} + A_{n(q+1)+k}, \end{aligned} \tag{1'}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, q - 1$.

Demonstraţie. Ecuaţia (1) se poate scrie sub forma:

$$x^{n(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_k x^{q-k-1} + A_q x^{n(q+1)-1} + x^{(n-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{q+1+k} x^{q-k-1} +$$

$$+ A_{2q+1}\, x^{(n-1)(q+1)-1} + x^{(n-2)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{2(q+1)+k}\, x^{q-k-1} +$$

$$+ A_{3q+2}\, x^{(n-2)(q+1)-1} + \ldots + x^{(n-i)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{i(q+1)+k}\, x^{q-k-1} +$$

$$+ A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i)(q+1)-1} + \ldots + x^{q+1} \sum_{k=0}^{q-1} A_{(n-1)(q+1)+k}\, x^{q-k-1} +$$

$$+ A_{(n-1)(q+1)+q}\, x^{q} + \sum_{k=0}^{q-1} A_{n(q+1)+k}\, x^{q-k-1} = 0, \tag{3}$$

sau, mai concentrat:

$$\sum_{i=0}^{n} x^{(n-i)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{i(q+1)+k} x^{q-k-1} + \sum_{i=0}^{n-1} A_{i(q+1)+q} x^{(n-i)(q+1)-1} = 0 \tag{3'}$$

Întrucît avem însă evident:

$$A_{q+1+k} = A_q - A_k + (A_{q+1+k} + A_k - A_q),$$

$$A_{2(q+1)+k} = A_q + A_{2q+1} - A_k - A_{q+1+k} + [A_{2(q+1)+k} + A_{q+1+k} +$$
$$+ A_k - A_{2q+1} - A_q]$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$A_{i(q+1)+k} = A_q + \ldots + A_{i(q+1)-1} - A_k - \ldots - A_{(i-1)(q+1)+k} +$$
$$+ [A_{i(q+1)+k} + \ldots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \ldots - A_q],$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$A_{n(q+1)+k} = A_q + \ldots + A_{n(q+1)-1} - A_k - \ldots - A_{(n-1)(q+1)+k} +$$
$$+ [A_{n(q+1)+k} + \ldots + A_k - A_{n(q+1)-1} - \ldots - A_q],$$

ecuaţia (3) se mai poate scrie şi sub forma:

$$x^{n(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_k x^{q-k-1} - x^{(n-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_k x^{q-k-1} + A_q x^{n(q+1)-1} +$$

$$+ x^{(n-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_q x^{q-k-1} + x^{(n-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{q+1+k} + A_k - A_q] x^{q-k-1} -$$

$$- x^{(n-2)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{q+1+k} + A_k - A_q]\, x^{q-k-1} + A_{2q+1}\, x^{(n-1)(q+1)-1} +$$

$$+ x^{(n-2)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{2q+1} x^{q-k-1} + \ldots + x^{(n-i)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \ldots +$$

$$+ A_k - A_{i(q+1)-1} - \ldots - A_q] x^{q-k-1} - x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \ldots +$$

$$+ A_k - A_{i(q+1)-1} - \ldots - A_q] x^{q-k-1} + A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i)(q+1)-1} +$$

$$+ x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{i(q+1)+q}\, x^{q-k-1} + \ldots + \sum_{k=0}^{q-1} [A_{n(q+1)+k} + \ldots + A_k -$$

$$- A_{n(q+1)-1} - \ldots - A_q] x^{q-k-1} = 0, \tag{4}$$

sau concentrat:

$$\sum_{i=0}^{n} x^{(n-i)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i)(q+1)-1} + \sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{i(q+1)+q} x^{q-k-1} = 0. \qquad (4')$$

Însă, întrucît:

(a) $$x^{(n-i)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} -$$

$$- x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} =$$

$$x^{(n-i-1)(q+1)} (x^{q+1} - 1) \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} =$$

$$= x^{(n-i-1)(q+1)} (x-1)(x^q + x^{q-1} + \dots + x + 1) \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots +$$

$$+ A_k - A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1},$$

(b) $$A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i)(q+1)-1} + x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} A_{i(q+1)+q} x^{q-k-1} =$$

$$= A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i)(q+1)-1} + x^{(n-i-1)(q+1)} (x^{q-1} + \dots + x + 1) A_{i(q+1)+q} =$$

$$= A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i-1)(q+1)} (x^q + x^{q-1} + \dots + x + 1),$$

ecuația (4′) devine:

(5′)

$$(x^q + x^{q-1} + \dots + x + 1)(x-1) \sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \dots + A_k -$$

$$- A_{i(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} + (x^q + x^{q-1} + \dots +$$

$$+ x + 1) \sum_{i=0}^{n-1} A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i-1)(q+1)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} [A_{n(q+1)+k} + \dots + A_k - A_{n(q+1)-1} - \dots - A_q] x^{q-k-1} = 0,$$

de unde obţinem:

(6′)

$$(x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1)\Big\{(x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-i-1)(q+1)} \sum_{k=0}^{q-1} [A_{i(q+1)+k} + \ldots +$$

$$+ A_k - A_{i(q+1)-1} - \ldots - A_q]x^{q-k-1} + \sum_{i=0}^{n-1} A_{i(q+1)+q}\, x^{(n-i-1)(q+1)}\Big\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} [A_{n(q+1)+k} + \ldots + A_k - A_{n(q+1)-1} - \ldots - A_q]x^{q-k-1} = 0.$$

Or, pentru ca ecuaţia (6′), care este identică cu (1) să admită rădăcinile ecuaţiei (2), este suficient ca ultima sumă, care reprezintă un polinom de gradul $q - 1$, să fie identic nulă, ceea ce are loc atunci cînd avem relaţiile (1′).

Observaţie. Relaţiile (1′) se pot scrie şi sub forma:

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_{(j+1)(q+1)-1} = \sum_{j=0}^{n} A_{j(q+1)+k},$$

unde $k = 0, 1, \ldots, q - 1$.

Teorema 2. Ecuaţia:

(1) $$A_0 x^{(n+1)(q+1)-2-r} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r} = 0,$$

unde $q \geqslant r \geqslant 1$, admite rădăcinile ecuaţiei

$$x^q + \ldots + 1 = 0,$$

dacă sînt satisfăcute relaţiile:

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_{(j+1)(q+1)-1} = \sum_{j=0}^{n} A_{j(q+1)+k}, \tag{1′}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, q - 1$ şi coeficienţii ai căror indici sînt mai mari decît $(n + 1)(q + 1) - 2 - r$ sînt nuli.

Demonstraţie. Înmulţind ecuaţia (1) cu x^r, obţinem:

$$A_0 x^{(n+1)(q+1)-2} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r}\, x^r = 0. \tag{3}$$

Punînd condiţiile ca această ecuaţie să admită rădăcinile ecuaţiei (2), conform teoremei 1, ţinînd seamă şi de faptul că ultlimii r coeficienţi sînt nuli, obţinem tocmai relaţiile (1′).

Teorema 3. Ecuaţia:

$$A_0 x^{(n+1)(q+1)-2-r} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r} = 0 \tag{1}$$

unde $q \geqslant r \geqslant 1$, admite rădăcinile ecuației:

$$x_{q+1} - 1 = 0, \tag{2}$$

dacă sint satisfăcute relațiile:

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_{(j+1)(q+1)-1} = \sum_{j=0}^{n} A_{j(q+1)+k} = 0, \tag{1'}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, q - 1$.

Demonstrație. Din prima parte a condițiilor (1') rezultă, conform teoremei 2, că ecuația (1) admite rădăcinile ecuației:

$$x^q + \ldots + 1 = 0.$$

Pentru a admite rădăcinile ecuației (2) este suficient ca ea să mai admită și pe $x = 1$ ca rădăcină, ceea ce are loc atunci cînd suma coeficienților este nulă. Sumele parțiale ale coeficienților fiind nule și suma sumelor va fi nulă, deci teorema este demonstrată.

Teorema 4. Ecuația:

$$A_0 x^{(n+1)(q+1)-2-r} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r} = 0 \tag{1}$$

unde $q \geqslant r \geqslant 1$, admite rădăcinile ecuației:

$$x^q - x^{q-1} + \ldots + (-1)^{q-1} x + (-1)^q = 0, \tag{2}$$

dacă sînt satisfăcute relațiile:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{(j+1)(q+1)-1} A_{(j+1)(q+1)-1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j(q+1)+k} A_{j(q+1)+k}, \tag{1'}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, q - 1$ și coeficienții ai căror indici sînt mai mari decît $(n + 1)(q + 1) - 2 - r$ sînt nuli.

Demonstrație. Să presupunem că ecuația (1) admite rădăcinile ecuației (2); avem deci identitatea:

$$\begin{aligned} A_0 x^{(n+1)(q+1)-2-r} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r} \equiv \\ \equiv [x^q - x^{q-1} + \ldots + (-1)^{q-1} x + (-1)^q] P(x). \end{aligned} \tag{3}$$

(3) fiind o identitate este adevărată pentru orice valoare a lui x, deci și pentru $-x$:

$$\begin{aligned} (-1)^{(n+1)(q+1)-2-r} A_0 x^{(n+1)(q+1)-2-r} + \ldots + A_{(n+1)(q+1)-2-r} \equiv \\ \equiv (-1)^q (x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1) P(-x). \end{aligned} \tag{4}$$

Pe baza teoremei 2, identitatea (4) are loc atunci cînd sînt îndeplinite condițiile (1').

BIBLIOGRAFIE

1. V. A l a c i, *Ecuațiile algebrice ale lui D. Pompeiu*, Revista matematică din Timișoara, nr. 1, martie 1949.
2. V. A l a c i, *Ecuațiile algebrice ale lui D. Pompeiu*, Revista matematică din Timișoara, nr. 4, iunie 1949.
3. D. P o m p e i u, *Algebră și aritmetică*, Revista matematică din Timișoara, nr. 12, februarie 1949.

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUE TYPE POMPEIU-ALACI

R é s u m é

En deux articles, V. Alaci montre comment, en partant de quelques observations de D. Pompeiu, on peut résoudre une série des équations de V-ème et VI-ème degré et comment on peut reduire les équations de degré 2q à q à moins qu'entre les coefficients on a certaines relations.

Dans la présente note on généralize les équations de type Pompeiu-Alaci à des équations de degré $(n+1)(q+1)-2$ et $(n+1)(q+1)-2-r$ et on montre comment peuvent-elles etre reduites alors qu'entre les coefficients existent certaines relations, permettant à résoudre des équations de degré supérieur en plusieurs cas.