DESPRE O GENERALIZARE A METODEI LUI NEWTON–KANTOROVICI

de

IULIU COROIAN

1. *Introducere.* Să considerăm spaţiile Banach X, Y şi un operator neliniar P care ne duce de la X la Y, mai precis $P : \Omega \to Y$, unde Ω este o mulţime deschisă din X.

Presupunem că în mulţimea Ω_0 — închiderea unei submulţimi deschise a lui Ω, $P(x)$ admite derivata în sens Fréchet $P'(x)$, şi ne interesează soluţiile ecuaţiei

$$P(x) = 0. \tag{1}$$

În acest scop să considerăm metoda iterativă

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n M(x_n) P(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

în care $M : \Omega_0 \to L(Y, X)$, $L(Y, X)$ fiind spaţiul Banach al operatorilor liniari şi continui definiţi pe Y cu valori în X, iar $\{\lambda_n\}$ este un şir de numere reale care îndeplineşte condiţiile:

$$0 < \lambda_n \leqslant 1, \ \lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots, \ \inf \cdot \lambda_n = \lambda \geqslant 0.$$

Dacă $\lambda_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ atunci (2) este chiar metoda de tip Newton considerată în [1], [2]. Cazul în care $\lambda_n = 1$, $M(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ne dă cunoscuta metodă a lui Newton-Kantorovici, iar dacă $\{\lambda_n\}$ este un şir cu proprietăţile amintite şi $M(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$, atunci obţinem o generalizare a metodei Newton-Kantorovici, studiată în [4].

2. În lucrarea de faţă vom da condiţii suficiente pentru convergenţa şirului $\{x_n\}$ furnizat de procedeul iterativ (2) către soluţia ecuaţiei neliniare (1), condiţii care extind condiţiile date în [1], [2], [4], pentru cazul metodei iterative (2).

TEOREMA 1. *Presupunem îndeplinite condiţiile:*

1°. $\|M(x)\| \leqslant B$, $\forall x \in \Omega_0$,

2°. $\exists x_0 \in \Omega_0$ *aşa ca* $0 < \|P(x_0)\| \leqslant \eta_0$, 3°. $\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\,\|x - y\|^{\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, L = *constantă*,

4°. $\|I - \lambda_n P'(x)M(x)\| \leq \lambda_n < 1$, $\forall x \in \Omega_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

I = operatorul identic,

5°. $h_0 = \dfrac{B^{1+\gamma} L \eta_0^{\gamma}}{1 - \lambda_0} < 1 + \gamma$,

6°. $S(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\} \subset \Omega_0$, unde

$$r = \frac{\lambda_0 B \eta_0}{1 - \alpha_0}, \quad \alpha_0 = \lambda_0 + (1 - \lambda_0)\frac{h_0 \lambda_0^{1+\gamma}}{1 + \gamma}.$$

În aceste condiții șirul $\{x_n\}$ converge către o soluție $x^* \in \Omega_0$, a ecuației (1), convergența fiind caracterizată de inegalitatea

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\lambda_0 B \eta_0}{1 - \alpha_0}\, \alpha_0^{n}. \tag{3}$$

Demonstrație. Mersul demonstrației este asemănător cu demonstrația teoremei 1 din [1], respectiv [2], numai că în acest caz se obțin alte delimitări.

Introducem notațiile

$$\eta_{n+1} = \eta_n \alpha_n, \quad h_n = \frac{B^{1+\gamma} L \eta_n^{\gamma}}{1 - \lambda_n}, \quad \alpha_n = \lambda_n + (1 - \lambda_n)\frac{h_n \lambda_n^{1+\gamma}}{1 + \gamma}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

În condițiile noastre se deduce că $0 < \alpha_n < 1$, α_n fiind o combinație liniară convexă a numerelor $\dfrac{h_n \lambda_n^{1+\gamma}}{1 + \gamma}$ și 1.

La primul pas vom arăta că $\|P(x_n)\| \leq \eta_n$ și $x_k \in S(x_0, r)$ pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. În acest scop se obțin direct inegalitățile

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots, \tag{4}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n \alpha_n = \eta_0 \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n < \eta_0 \alpha_0^{n+1}. \tag{5}$$

Apoi avem

$$\|x_1 - x_0\| = \|-\lambda_0 M(x_0) P(x_0)\| \leq \lambda_0 B \eta_0 < \frac{\lambda_0 B \eta_0}{1 - \alpha_0} = r,$$

adică $x_1 \in S(x_0, r)$.

Folosind apoi inegalitatea

$$\|P(x) - P(y) - P'(y)(x - y)\| \leq \frac{L}{1 + \gamma}\|x - y\|^{1+\gamma}, \tag{6}$$

dată în [5], obținem

$$\|P(x_1)\| \leqslant \|P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0)\| + \|P(x_0) +$$

$$+ P'(x_0)(x_1 - x_0)\| \leqslant \frac{L}{1+\gamma}\| - \lambda_0 M(x_0)P(x_0)\|^{1+\gamma} +$$

$$+ \|P(x_0) - \lambda_0 P'(x_0)M(x_0)P(x_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B^{1+\gamma}L\eta_0^{1+\gamma}}{1+\gamma}\lambda_0^{1+\gamma} + \|I - \lambda_0 P'(x_0)M(x_0)\| \cdot \|P(x_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0\left[\lambda_0 + (1-\lambda_0)\frac{h_0\lambda_0^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right] = \eta_0\alpha_0 = \eta_1.$$

Presupunem acum că $\|P(x_j)\| \leqslant \eta_j$ și $x_k \in S(x_0, r)$ pentru orice $j,k = \overline{0,n}$ și să demonstrăm că această proprietate se păstrează pentru $j = n+1$ și $k = n+1$.

Servindu-ne din nou de inegalitatea (6) obținem

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \|P(x_{n+1}) - P(x_n) - P'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \|P(x_n) +$$

$$+ P'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leqslant \frac{L}{1+\gamma}\| - \lambda_n M(x_n)P(x_n)\|^{1+\gamma} +$$

$$+ \|I - \lambda_n P'(x_n)M(x_n)\|\,\|P(x_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B^{1+\gamma}L\eta_n^{1+\gamma}}{1+\gamma}\lambda_n^{1+\gamma} + \eta_n\lambda_n = \eta_n\left[\lambda_n + (1-\lambda_n)\frac{h_n\lambda_n^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right] = \eta_n\alpha_n = \eta_{n+1}.$$

Cu inegalitatea (5) se obține

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \lambda_n B\eta_n + \ldots + \lambda_0 B\eta_0 \leqslant \lambda_0 B\sum_{i=0}^{n}\eta_i <$$

$$< \lambda_0 B\eta_0\sum_{i=0}^{n}\alpha_0^i = \frac{\lambda_0 B\eta_0}{1-\alpha_0}(1-\alpha_0^{n+1}) < \frac{\lambda_0 B\eta_0}{1-\alpha_0} = r,$$

adică $x_{n+1} \in S(x_0, r)$.

În continuare avem:

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \lambda_{n+p-1}B\eta_{n+p-1} + \ldots + \lambda_n B\,\eta_n \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n B\sum_{j=n}^{n+p-1}\eta_j < \lambda_n B\eta_0\left[\sum_{j=0}^{n+p-1}\alpha_0^j - \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_0^j\right],$$

adică

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{\lambda_n B\eta_0}{1-\alpha_0}(1-\alpha_0^p)\alpha_0^n. \tag{7}$$

Această relație arată că șirul $\{x_n\}$ este un șir fundamental de elemente în sfera $S(x_0, r)$. Din faptul că $\bar{S}(x_0, r) \subset \Omega_0$, Ω_0 fiind o mulțime închisă iar X un spaţiu complet, rezultă că şirul $\{x_n\}$ este convergent către un $x^* \in \Omega_0$.

Din (7) pentru $p \to \infty$ se obţine inegalitatea (3).
Pentru a arăta că x^* este soluţie a ecuaţiei (1) observăm că

$$||P(x_n)|| \leqslant \eta_n < \eta_0 \alpha_0^n \to 0,$$

şi cum norma este o funcţie continuă şi la fel $P(x)$, fiind diferenţiabil în sens Fréchet, obţinem

$$||P(x_n)|| \xrightarrow[n\to\infty]{} ||P(x^*)|| = 0,$$

de unde rezultă că $P(x^*) = 0$.
Teorema este complet demonstrată.

Observaţia 1. Condiţia 4° a teoremei 1, cea mai tare de altfel s-ar putea ameliora, cerînd îndeplinirea ei nu pentru orice $x \in \Omega_0$, ci numai pentru termenii şirului $\{x_n\}$ daţi de iteraţia (2).

Observaţia 2. Teorema 1 ne asigură numai de o convergenţă de ordinul 1 a metodei (2). Se poate da şi în acest caz o teoremă similară teoremei 2 din [1, 2] în care se asigură o convergenţă de ordin superior.

3. Să considerăm acum pentru ecuaţia (1) metoda iterativă,

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \Gamma(x_n) P(x_n), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{8}$$

în care

$$\Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1},\ \text{iar}\ 0 < \lambda_n \leqslant 1\ \text{şi}\ \inf \lambda_n = \lambda > 0,$$

şirul $\{\lambda_n\}$ fiind nu neapărat monoton.
Vom da în cazul acestei metode o teoremă similară teoremei 1 din [4], în care se evită presupunerile referitoare la existenţa şi mărginirea în normă a derivatei $P''(x)$ în sens Fréchet.

TEOREMA 2. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile:*

a) $\exists\, \Gamma(x_0) = [P'(x_0)]^{-1}$ şi $||\Gamma(x_0)|| \leqslant B_0$,

b) $||\Gamma(x_0) P(x_0)|| \leqslant \eta_0$,

c) $||P'(x) - P'(y)|| \leqslant L\ ||x - y||$, $L =$ *constantă, pentru orice*

$$x,\ y \in S(x_0,\ r),\ r = 2\eta_0,$$

d) $h_0 = B_0 L \eta_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$,

atunci şirul $\{x_n\}$ *dat de procedeul iterativ* (8) *converge către un element* $x^* \in S(x_0,\ r)$, x^* *este soluţie a ecuaţiei* (1), *şi are loc delimitarea*

$$||x_n - x^*|| \leqslant 2\eta_0 q^n,\ \textit{unde}\ q = \frac{1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 h_0}{1 - \lambda h_0}. \tag{9}$$

Demonstrația se face în modul obișnuit utilizat la demonstrarea teoremei de convergență a metodei lui Newton, de către L. V. Kantorovici în [3] și anume la primul pas se arată că toate condițiile a), b), c), d) se păstrează pentru elementele x_1, x_2, ..., furnizate de (8). În adevăr avem

$$||x_1 - x_0|| \leqslant \lambda_0 \eta_0,$$

$$||P'(x_0) - P'(x_1)|| \leqslant L||x_0 - x_1|| \leqslant L\lambda_0\eta_0,$$

$$||\Gamma(x_0)[P'(x_0) - P'(x_1)]|| \leqslant B_0 L \lambda_0 \eta_0 = h_0\lambda_0 < 1.$$

De aici pe baza unei bine cunoscute teoreme, rezultă că există operatorul invers

$$H = \{I - \Gamma(x_0)[P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1},$$

unde I este operatorul identic din spațiul X, și

$$||H|| \leqslant \frac{1}{1 - \lambda_0 h_0}.$$

Prin verificare directă se obține

$$\Gamma(x_1) = H\Gamma(x_0) \text{ și } ||\Gamma(x_1)|| \leqslant \frac{B_0}{1 - \lambda_0 h_0} = B_1.$$

Se mai obține apoi delimitarea

$$||\Gamma(x_1)P(x_1)|| \leqslant \frac{1 - \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 h_0}{1 - \lambda_0 h_0}\eta_0 = \eta_1,$$

și apoi

$$h_1 = B_1 L \eta_1 = \frac{1 - \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 h_0}{(1 - \lambda_0 h_0)^2} \cdot h_0 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Prin inducție matematică se arată ușor că condițiile a), b), c), d) se mențin pentru orice x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, adică

$$||\Gamma(x_{n+1})|| \leqslant B_{n+1} = \frac{B_n}{1 - \lambda_n h_n}, \tag{10}$$

$$||\Gamma(x_{n+1})P(x_{n+1})|| \leqslant \eta_{n+1} = \frac{1 - \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 h_n}{1 - \lambda_n h_n}\eta_n, \tag{11}$$

$$h_{n+1} = B_{n+1} L \eta_{n+1} = \frac{1 - \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 h_n}{(1 - \lambda_n h_n)^2} h_n \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Pentru a arăta că $\{x_n\}$ este un şir fundamental vom considera funcţia reală

$$F(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2t}}{t}, \; t \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Printr-un calcul simplu se verifică că $F(t) \leqslant 2$ şi avem

$$\lambda_k \eta_k = F(h_k)\eta_k - F(h_{k+1})\eta_{k+1}. \tag{13}$$

Cu egalitatea (13) obţinem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_n \eta_n + \ldots + \lambda_{n+p-1}\, \eta_{n+p-1},$$
$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant F(h_n)\eta_n - F(h_{n+p})\eta_{n+p} < F(h_n)\eta_n \leqslant 2\eta_n.$$

Din relaţia (11) rezultă

$$\eta_{n+1} = \frac{1 - \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 h_n}{1 - \lambda_n h_n}\eta_n \leqslant \frac{1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 h_0}{1 - \lambda h_0}\eta_n = q\eta_n,$$

şi aplicînd repetat această inegalitate se găseşte

$$\eta_n \leqslant \eta_0 q^n.$$

În sfîrşit avem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant 2\eta_0\, q^n \tag{14}$$

Cum $0 < q < 1$ ultima inegalitate arată că şirul $\{x_n\}$ este fundamental, iar din completitudinea spaţiului X rezultă că există $x^* = \lim\limits_n x_n$.

Pentru $p \to \infty$ din (14) obţinem (9), iar de aici pentru $n = 0$ rezultă că $x^* \in S(x_0, r)$.

Pentru a arăta că $P(x^*) = 0$ observăm că

$$\frac{1}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{\lambda} < +\infty \text{ şi } \|P'(x_n)\| < +\infty$$

deoarece $P'(x_n)$ este un operator liniar, inversul operatorului $\Gamma(x_n)$ mărginit în normă.

Atunci din egalitatea evidentă

$$\left\| -\frac{1}{\lambda_n} P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \right\| = \|P(x_n)\|,$$

pentru $n \to \infty$ se obţine $P(x^*) = 0$.

Observaţia 3. Şi în cazul metodei iterative (8) se poate da o teoremă similară cu teorema 2 din [4], care ne asigură de o convergenţă de ordinul 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Coroian I.: „*Asupra metodelor iterative de tip Newton*", Studii şi cercetări matematice, Acad. R.S.R. Nr. 1, 1970, 31—38.
2. Dennis, J. E. Jr. „*On Newton — Like Methods*", Numerische Math, Nr. 11, 1968, 324—330.
3. Канторович Л. В.: "*О методе Ньютона*", Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 28, 1949, 104—144.
4. Кивистик Л.: Изв. Акад. Наук Эстонской ССР, серия физ. мат. техн. наук. № 4 1960, 301—312.
5. Вертгайм Б. А.: „*Об условиях применения метода Ньютона*", Д. А. Н., СССР 110 № 5 1956, 719—722.

ON A GENERALIZATION OF NEWTON—KANTOROVITCH METHOD

Abstract

It is considered the iterativ method (2), where $P : \Omega \to Y$ is a non — linear operator, X, Y, are Banach spaces, Ω is an open subset of X, $M : \Omega_0 \to L(Y, X)$, Ω_0 is the closing of an open subset of Ω, $L(Y, X)$ is the space of linear bounded operators which transforms Y into X and $\{\lambda_n\}$ is a real numbers sequence

$$0 < \lambda_n \leq 1, \ \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots, \text{ in } f \lambda_n = \lambda \geq 0.$$

If $\lambda_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (2) gives the Newton -Like methods which was considered in [2] and [1].

If $\lambda_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ and $M(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$ is the inverse of the derivative in Fréchet's sense of $P(x)$, (2) gives the well known Newton-Kantorovitch's method which was considered in [3], [4].

The paper gives the sufficient conditions for the convergence of the method (2) towards the solution of the equation (1).