## ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE CE DEPIND DE UN PARAMETRU

de
A. GAIDICI

Se consideră ecuaţia

(1) $$P(x, \mu) = \theta$$

unde $x \in X$, $\mu \in M$, $X$ fiind un spaţiu de tip Banach şi $M$ un spaţiu liniar normat. Operatorul $P(x, \mu)$ transformă spaţiul produs $X \times M$ în $X$, iar $\theta$ este elementul nul al spaţiului $X$.

Existenţa şi unicitatea soluţiei $x^*(\mu)$ a ecuaţiei (1), precum şi convergenţa şirului de aproximaţii $\{x_n\}$ către $x^*(\mu)$, elementele $x_n$ se obţin prin aplicarea succesivă a metodei

(2) $$x_{n+1} = x_n - \Gamma_\mu^n P(x_n, \mu) \quad \text{unde} \quad \Gamma_\mu^n = [P'(x_n, \mu)]^{-1},$$

a fost studiată, folosind principiul majorantei, de către L. V. Kantorovici în [1].

În lucrarea de faţă ne propunem rezolvarea ecuaţiei (1) fără aplicarea principiului majorantei.

Despre operatorul $P(x, \mu)$ presupunem că este continuu în raport cu $x$ şi că admite derivatele în sens Fréchet $P'(x, \mu)$, $P''(x, \mu)$ în raport cu $x$. De asemenea mai presupunem că şi $P(x, \mu)$, $P'(x, \mu)$, $P''(x, \mu)$ admit derivatele parţiale în sens Fréchet $\frac{\partial}{\partial\mu} P(x, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial\mu} P'(x, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial\mu} P''(x, \mu)$ într-un anumit domeniu pe care-l vom specifica în cele ce urmează.

LEMA 1. Dacă pentru aproximaţiile iniţiale $x_0$ şi $\mu_0$ sînt satisfăcute următoarele condiţii:

1) există operatorul $\Gamma_{\mu_0}^0 = [P'(x_0, \mu_0)]^{-1}$ pentru care $\|\Gamma_{\mu_0}^0\| \leq b$

2) $\|P(x_0, \mu_0)\| \leq a$

pentru $\|x - x_0\| \leq r$

3) $\|P''(x_0, \mu_0)\| \leqslant c$

4) $\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P(x_0, \mu_0) \right\| \leqslant a'$

pentru $\|\mu - \mu_0\| \leqslant r'$

5) $\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \mu) \right\| \leqslant b'$

6) $\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P''(x, \mu) \right\| \leqslant c'$ pentru $\|x - x_0\| \leqslant r$ şi $\|\mu - \mu_0\| \leqslant r'$

7) $bb'r' < 1$

atunci există operaţiile $\Gamma_\mu^0 = [P'(x_0, \mu)]^{-1}$, $P(x_0, \mu)$, $P''(x, \mu)$

Demonstraţie. Arătăm existenţa lui $\Gamma_\mu^0$. Mai înainte de toate avem nevoie de norma expresiei $\Gamma_{\mu_0}^0(P'(x_0, \mu_0) - P'(x_0, \mu))$ pe care o evaluăm, folosind teorema generalizată a lui Lagrange şi condiţiile 1), 5) astfel

$$\|\Gamma_{\mu_0}^0(P'(x_0, \mu_0) - P'(x_0, \mu))\| \leqslant \|\Gamma_{\mu_0}^0\| \left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \bar{\mu}) \right\| \|\mu - \mu_0\| \leqslant bb'r' < 1$$

unde $\bar{\mu} = \mu_0 + t(\mu - \mu_0)$ şi $0 \leqslant t \leqslant 1$. Din egalitatea

$$\Gamma_{\mu_0}^0 P'(x_0, \mu) = I - \Gamma_{\mu_0}^0 (P'(x_0, \mu_0) - P'(x_0, \mu)),$$

expresia precedentă şi teorema lui Banach, rezultă existenţa operatorului $[\Gamma_{\mu_0}^0 P'(x_0, \mu)]^{-1}$ pentru care avem

$$\|[\Gamma_{\mu_0}^0 P'(x_0, \mu)]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - bb'r'}$$

Însă

$$\Gamma_\mu^0 = [P'(x_0, \mu)]^{-1} = [P'(x_0, \mu_0) \Gamma_{\mu_0}^0 P'(x_0, \mu)]^{-1} = [\Gamma_{\mu_0}^0 P'(x_0, \mu)]^{-1} \Gamma_{\mu_0}^0$$

deci

$$\|\Gamma_\mu^0\| \leqslant \frac{b}{1 - bb'r'} = B_0$$

Pentru operatorul $P(x_0, \mu)$ avem

$$P(x_0, \mu) = P(x_0, \mu_0) + P(x_0, \mu) - P(x_0, \mu_0)$$

de unde pe baza teoremei lui Lagrange, a condiţiilor 2), 4) obţinem

$$\|P(x_0, \mu)\| \leqslant a + a'r' = \eta_0'$$

La fel din egalitatea

$$P''(x, \mu) = P''(x, \mu_0) + P''(x, \mu) - P''(x, \mu_0)$$

pe baza aceleiaşi teoreme şi a condiţiilor 3), 6) rezultă

$$\|P''(x, \mu)\| \leqslant c + c'r' = M$$

A. Procedeul de bază (relația (2)).

TEOREMA 1. Dacă pentru aproximația inițială $x_0$ sînt satisfăcute condițiile:

1° $\|\Gamma_\mu^0\| \leqslant B_0$

2° $\|\Gamma_\mu^0 P(x_0, \mu)\| \leqslant B_0 \eta_0' = \eta_0$ pentru $\|\mu - \mu_0\| \leqslant r'$

3° $\|P''(x, \mu)\| \leqslant M$ pentru $\|x - x_0\| \leqslant r$ și $\|\mu - \mu_0\| \leqslant r'$

4° $h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$

atunci ecuația (1) are cel puțin o soluție $x^*(\mu) \in S(x_0, 2\eta_0)$. Rapiditatea convergenței este dată de relația

(3) $$\|x_n(\mu) - x^*(\mu)\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^n-1} \eta_0$$

Demonstrația este asemnătoare cu cea dată de L. V. Kantorovici în [3], adică se arată că trecînd dela aproximația $x_0$ la $x_1$ condițiile teoremei se păstrează.

Din (2) și condiția 2° rezultă

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \|\Gamma_\mu^0 P(x_0, \mu)\| \leqslant \eta_0$$

Aplicînd formula lui Lagrange pentru $P'(x, \mu)$ și ținînd cont de condițiile 1°, 3° avem

$$\|\Gamma_\mu^0(P'(x_0, \mu) - P'(x_1, \mu))\| \leqslant B_0 M \eta_0 = h_0 < 1$$

Există deci operatorul

$$H = [I - \Gamma_\mu^0(P'(x_0, \mu) - P'(x_1, \mu))]^{-1}$$

pentru care

$$\|H\| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}$$

însă $\Gamma_\mu^1 = H\Gamma_\mu^0$ deci

$$\|\Gamma_\mu^1\| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1$$

Din formula generalizată a lui Taylor, condițiile teoremei și (2) rezultă

$$\|\Gamma_\mu^0 P(x_1, \mu) - \Gamma_\mu^0(Px_0, \mu) - (x_1 - x_0)\| \leqslant \frac{1}{2} \|\Gamma_\mu^0 P''(\bar{x}, \mu)\| \, \|x_1 - x_0\|^2$$

sau

$$\|\Gamma_\mu^0 P(x_1, \mu)\| \leqslant \frac{1}{2} B_0 M \eta_0^2 = \frac{1}{2} h_0 \eta_0$$

Dar pe de altă parte

$$\Gamma_\mu P(x_1, \mu) = H\Gamma_\mu^0 P(x_1, \mu)$$

de unde obținem

$$||\Gamma_\mu^1 P(x_1,\ \mu)|| \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{h_0\eta_0}{1-h_0} = \eta_1$$

Pentru expresia lui $h_1$ avem

$$h_1 = B_1 M \eta_1 = \frac{B_0}{1-h_0} M \frac{1}{2}\ \frac{h_0\eta_0}{1-h_0} = \frac{1}{2}\ \frac{h_0^2}{(1-h_0)^2} \leqslant 2h_0^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

Prin inducție completă se arată că

$$||x_{n+1} - x_n|| \leqslant \eta_n$$

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}$$

$$\eta_n = \frac{1}{2}\ \frac{h_{n-1}\,\eta_{n-1}}{1-h_{n-1}}$$

$$h_n = \frac{1}{2}\ \frac{h_{n-1}^2}{(1-h_{n-1})^2}$$

Din aceste relații deducem

$$h_n \leqslant \frac{1}{2}(2h_0)^{2^n}$$

$$\eta_n \leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0$$

deci

$$||x_{n+1} - x_n|| \leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0$$

Bazați pe această relație avem

$$||x_{n+p} - x_n|| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0\left[1 + \frac{(2h_0)^{2^n(2-1)}}{2} + \frac{(2h_0)^{2^n(2^2-1)}}{2^2} + \ldots + \frac{(2h_0)^{2^n(2^{p-1}-1)}}{2^{p-1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right] = \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{-2^n-1}\eta_0\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

Trecînd la limită pentru $p \to \infty$ rezultă relația (3), în care pentru $n = 0$ avem $||x^* - x_0|| \leqslant 2\eta_0$. Tot în relația (3) pentru $n \to \infty$ și pe baza faptului că $X$ este complet obținem $\lim x^n(\mu) = x^*(\mu)$.

Să arătăm că $x^*(\mu)$ este soluția ecuației (1). Într-adevăr

$$||\Gamma_\mu^* P(x_n,\ \mu)|| \leqslant \eta_n$$

dar $||\Gamma_\mu^*||$ este mărginit, iar $\eta_n \to 0$ pentru $n \to \infty$ și pe baza continuității lui $P(x,\ \mu)$ rezultă $P(x^*(\mu),\ \mu) = \theta$.

Arătăm, în continuare, că şirul de aproximaţii $\{x_n\}$ se găseşte în sfera considerată $S(x_0, 2\eta_0)$. Avem

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_{n-1} + \eta_{n-2} + \ldots + \eta_0 \leqslant \eta_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \eta_0 \leqslant 2\eta_0$$

TEOREMA 2. În condiţiile 1°—4° ale teoremei 1 ecuaţia (1) are o singură soluţie în sfera $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$.

Demonstraţia este analoagă cu cea dată in [4]. Se consideră operaţia auxiliară

$$F_n(x, \mu) = x - \Gamma_\mu^n P(x, \mu)$$

şi fie $\tau(\mu)$ o soluţie a ecuaţiei (1). Avem

$$x_{n+1} = F_n(x_n, \mu), \qquad \tau = F_n(\tau, \mu)$$

$$F_n'(x_n, \mu) = 0, \qquad F_n''(x, \mu) = -\Gamma_\mu^n P''(x, \mu)$$

Pe baza relaţiei

$$\|F_n(\tau, \mu) - F_n(x_n, \mu) - F_n'(x_n, \mu)(\tau - x_n)\| \leqslant \frac{1}{2} \|F_n''(x, \mu)\| \, \|\tau - x_n\|^2$$

şi ţinînd seama de condiţiile teoremei, de relaţiile dintre constantele $B_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ rezultă

$$\|\tau(\mu) - x_{n+1}(\mu)\| \leqslant \frac{2^{n-1}}{\eta_0} \|\tau(\mu) - x_n(\mu)\|^2$$

Presupunind că $\|\tau(\mu) - x_0(\mu)\| \leqslant \rho_0 \eta_0$ obţinem

$$\|\tau(\mu) - x_{n+1}(\mu)\| \leqslant 2^{-n-2^{n+1}} \rho_0^{2^{n+1}} \eta_0 = \frac{1}{2^n} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{2^{n+1}} \eta_0$$

iar dacă $\rho_0 \leqslant 2$ atunci $\lim x_{n+1} = \tau$ şi cum limita este unică rezultă $x^*(\mu) = \tau(\mu)$

B. Procedeul modificat (relaţia (4)).

TEOREMA 3. Dacă condiţiile teoremei 1 sînt îndeplinite atunci procedeul

(4) $$x_{n+1} = x_n - \Gamma_\mu^0 P(x_n, \mu), \quad \text{unde} \quad \Gamma_\mu^0 = [P'(x_0, \mu)]^{-1}$$

este convergent către soluția $x^*(\mu) = \lim x(\mu)$ a ecuației (1). Rapiditatea convergenței este caracterizată de relația

$$\|x^*(\mu) - x_n(\mu)\| \leq \frac{q^n}{1-q}, \quad q = h_0 N, \quad 0 < N < 2 \tag{5}$$

Demonstrația este analoagă cu cea dată în lucrările [3] și [4]

LEMA 2. Dacă pentru aproximația inițială $\mu_0$ și orice $x \in X$ sînt îndeplinite condițiile:

1) există $\Gamma^x_{\mu_0} = [P'(x, \mu_0)]^{-1}$ astfel ca $\|\Gamma^x_{\mu_0}\| \leq b$

2) —7) sînt aceleași ca și în lema 1, atunci există operațiile

$$\Gamma^x_\mu = [P'(x, \mu)]^{-1}, \quad P(x_0, \mu), \quad P''(x, \mu).$$

TEOREMA 4. Dacă pentru aproximația inițială $x_0$ sînt satisfăcute următoarele condiții:

1° $\|\Gamma^x_\mu\| \leq B$ pentru orice $x \in S(x_0, \rho)$, $\rho = HB\eta_0$, $H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^k-1}$

2° $\|\Gamma^{x_0}_\mu P(x_0, \mu)\| \leq \eta_0$

3° $\|P''(x, \mu)\| \leq M$

4° $\rho_0 = BM\eta_0 < 2$

atunci ecuația (1) admite soluția $x^*(\mu) \in S(x_0, \rho)$ ce poate fi găsită prin aplicarea procedeului (2). Rapiditatea convergenței este dată de

$$\|x^*(\mu) - x_n(\mu)\| \leq HB\eta_0 \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^n-1}, \tag{6}$$

Demonstrația este asemănătoare cu cea dată în [5]

Observație. Teoremele enunțate rămîn valabile dacă în locul condiției $\|P''(x, \mu)\| \leq M$ se presupune satisfăcută o condiție de tip Hölder pentru derivata $P'(x, \mu)$, adică

$$\|P'(x', \mu) - P'(x'', \mu) < \| \leq K\|x - x''\|^\alpha, \qquad \alpha \in (0, 1]$$

BIBLIOGRAFIE


1. L. V. Kantorovici, *Necatorîi dalnejii primenenia metoda Niutona* V.L.U. nr. 7, 1957.
2. I. P. Misosvchi; V.L.U. nr. 11, 1953.
3. L. V. Kantorovici: *O metoda Niutona*, Tr. mat. in-ta Steklova, 28, 1949
4. B. Janko și M. Balazs: *Asupra metodei generalizate a lui Newton în rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare*, Analele Univ. Timișoara v. IV, 1966.

5. I.P. M i s o v s c h i: *C voprsi o shodimosti metoda Niutona*. Tr. mat. in-ta Steklova, 28, 1949
6. B. J a n k o şi I. C o r o i a n: *Metoda Newton-Kantorocici pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare depinzînd de un parametru*. Stud. şi cerc. mat. nr. 10, t.20. 1968.

## ON THE SOLVING OF OPERATIONAL EQUATIONS DEPENDING ON A PARAMETER

A b s t r a c t

Our purpose in this paper is to solve the equation

$$P(x, \mu) = 0 \tag{1}$$

by interative methods

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_\mu^n P(x_n, \mu)$$

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_\mu^0 P(x_n, \mu)$$

where

$$\Gamma_\mu^n = [P'(x_n, \mu)]^{-1}$$

without using the majorant principle.

The operator $P(x, \mu)$ is defined in the product space $X \times M$ and has its values in $X$, where $X$ is a Banach space and $M$ is normed linear space. We suppose that $P(x, \mu)$ is continuous in x, admits Fréchet derivatives until the second order, $P'(x, \mu)$, $P''(x, \mu)$ in $x$ and also partial Fréchet derivatives $\frac{\partial}{\partial\mu} P(x, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial\mu} P'(x, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial\mu} P''(x, \mu)$.

The paper contains several theorems concerning the existence of the solution $x^*(\mu) = \lim x_n(\mu)$ of the equation (1), where the sequence $x_n(\mu)$ is obtained by the above- mentioned methods. We give also theorems on unicity of the solution and some remarks.