ASUPRA UNICITĂȚII DETERMINĂRII DE CARE UN SIMPLEX A^r A VÎRFURILOR LUI

de AUREL IOANOVICIU

Dacă într-un spațiu euclidian n-dimensional R^n punctele $a_0, a_1, \ldots, a_r$, $r \geqslant n$, formează un sistem de puncte independente, numim simplex r-dimensional mulțimea A^r a punctelor din R^n care se scriu sub forma:

$$x = \lambda^i a_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, r) \tag{1}$$

unde λ^i sînt numere reale satisfăcînd condițiilor:

$$\sum \lambda^i = 0, \qquad \lambda^i \geqslant 0. \tag{2}$$

Punctele $a_0, a_1, \ldots, a_r$ aparțin evident simplexului și se numesc vîrfuri.

Să demonstrăm că mulțimea A^r își determină în mod unic vîrfurile.

Pentru aceasta să considerăm un sistem de ρ puncte $u_0, u_1, \ldots, u_\rho$ independente din A^r. Pentru a arăta că aceste ρ puncte nu pot forma un sistem de vîrfuri ale simplexului A^r este suficient să arătăm că există puncte din A^r care nu pot fi exprimate cu ajutorul acestora prin relații de forma (1). Să arătăm întîi că există cel puțin un a_i diferit de a_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$. Aceasta este evident dacă $\rho < r$. Dacă $\rho = r$ există un a_i diferit de u_α afară de cazul în care punctele u_α coincid chiar cu vîrfurile simplexului. În fine, dacă $\rho > r$, dacă $r + 1$ dintre punctele u_α ar coincide cu punctele a_i, atunci celelalte $\rho - r$ puncte aparținind lui A^r ar depinde de a_i, deci punctele u_α nu ar fi toate independente. Fie $a_{i_0} \neq u_\alpha$. Analog, există cel puțin un $u_{\alpha_0} \neq a_i$.

Să demonstrăm acum că punctul a_{i_0} nu poate fi exprimat în funcție de u_α printr-o relație de forma (1). Să presupunem contrariul. Atunci:

$$a_{i_0} = \mu^\alpha u_\alpha, \tag{3}$$

unde:

$$\sum \mu^\alpha = 1, \quad \mu^\alpha \geqslant 0, \tag{4}$$

Datorită faptului că $a_{i_0} \neq u_\alpha$ în relația (3) există cel puțin doi coeficienți $\mu^\alpha \neq 0$, deci ținînd seama de (4) există un $0 < \mu^{\alpha_0} < 1$, unde μ^{α_0} este coeficientul unui $u_{\alpha_0} \neq a_i$. Cum:

$$u_\alpha = \lambda^i_\alpha a_i, \quad u_{\alpha_0} = \lambda^i_{\alpha_0} a_i,$$

unde cel puțin doi dintre coeficienți $\lambda^i_{\alpha_0} \neq 0$.

Relațiile (3) se mai pot scrie:

$$a_{i_0} = \mu^\alpha \lambda^i_\alpha a_i = \mu^{\alpha_0} \lambda^i_{\alpha_0} a_i + \ldots$$

Unde $\mu^{\alpha_0} \neq 0$ și cel puțin doi dintre coeficienții $\lambda^i_{\alpha_0} \neq 0$. Rezultă că a_{i_0} este exprimat în funcție de cel puțin doi dintre a_i ceeace contrazice independența sistemului de puncte a_i.

BIBLIOGRAFIE

1. L. S. Pontreaghin. *Introducere în topologia combinatorie.*

SUR L'UNICITÉ DE LA DÉTERMINATION DE SES SOMMETS PAR UN SIMPLEXE A^r

Résumé

La note donne une nouvelle méthode, rigoureuse, pour démontrer l'unicité de la détermination de ses sommets par un simplexe A^r de l'espace euclidien à n dimension R^n.