DESPRE REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE INFINITE

de

B. Jankó, D. Olteanu, V. David

Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots = b_i (j = 1, 2, \ldots, i=1, 2, \ldots) \quad (1)$$

în care coeficienţii a_{ij} şi termenii liberi b_i sînt numere reale date, iar x_j sînt necunoscute. Printr-o soluţie a sistemului (1) înţelegem un şir de numere (x_i) care înlocuite în membrii întîi ai ecuaţiilor formează serii convergente avînd drept sume termenii liberi corespunzători.

Sistemul (1) poate fi scris sub forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad (1')$$

sau sub forma [1]

$$a_{ii}x_i + A_i = 0, \quad A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}x_j - b_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad (1'')$$

Sistemul liniar (1) este echivalent cu sistemul neliniar

$$F_i(x_i; A_i, C_i^{(0)}) = \Phi_i(A_i, C_i^{(0)})(a_{ii}x_i + A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots,) \quad (2)$$

unde Φ_i sînt funcţii mărginite, fără rădăcini reale şi de formă simplă iar $C_i^{(0)}$ sînt constante care se determină astfel încît pentru aproximaţia iniţială

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots) \text{ să avem}$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \quad i \neq j \quad (3)$$

Condițiile (3) sînt echivalente cu

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial A_i}\right)_0 = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Operația neliniară:

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1 ; A_1, C_1^{(0)}) \\ \vdots \\ F_i(x_i ; A_i, C_i^{(0)}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

are ca derivată în sens Fréchet în punctul X_0

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)_0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_0 & \ldots \end{pmatrix}$$

unde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$
Metoda modificată a lui Newton-Kanotorovici

$$X_{k+1} = X_k - [F'(X_0)]^{-1}F(X_k), \; (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

duce în cazul nostru la relațiile

$$x_i^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F_i(x_i^{(k)} ; A_i^{(k)}, C_i^{(0)})}{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)} \; (i = 1, 2, \ldots ; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

$$\text{unde } X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, \ldots), \; A_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i$$

Pentru studiul convergenței metodei dăm teorema următoare [2] Considerăm operația neliniară F ce transformă spațiul X de tip Hilbert în el însuși.

În acest caz, dacă sînt satisfăcute condițiile:

1. Pentru elementul X_0 al aproximației inițiale, operatorul $F'(X_0)$ admite inversul $\Gamma_0 = [F'(X_0)]^{-1}$
2. Are loc delimitatea

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leqslant \eta_0$$

3. Derivata $F'(X_0)$ este este lipschitziană

$$\|\Gamma_0[\Gamma'(\xi_1) - F'(\xi_2)]\| \leqslant K\|\xi_1 - \xi_2\|$$

unde ξ_1, ξ_2 sînt elemente arbitrare din domeniul

$$||X - X_0|| \leqslant 2\eta_0$$

4. Constantele η_0, K satisfac inegalitatea

$$h_0 = \eta_0 K \leqslant \frac{1}{2}$$

atunci, sistemul (1) admite soluţia X^* iar aproximaţiile succesive X_k obţinute din algoritmul (4) converg în normă spre X^*.

Ordinul de convergenţă şi eroarea sînt date de relaţia:

$$||X^* - X_k|| \leqslant q^{k-1} \cdot ||X^* - X_1||$$

unde $q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} < 1$

Teorema enunţată este valabilă pentru ecuaţia operaţională neliniară $F(x) = 0$ definită într-un spaţiu Banach.
În demonstraţie se trece de la ecuaţia $F(x) = 0$ la ecuaţia echivalentă $\Gamma_0(F(x)) = 0$ iar în continuare se procedează ca în [3] metoda modificată a lui Newton.

OBSERVAŢII

1. Teorema enunţată constituie o generalizare a rezultatelor din lucrările [1] şi [2]. Evitarea condiţiei $||F''(x)|| \leqslant K$ şi înlocuirea ei cu condiţia lipschitziană de la punctul 3 constituie o îmbunătăţire esenţială deoarece expresia derivaţiei $F''(x)$ are o formă complicată în condiţiile spaţiului Hilbert.

2. Condiţiile teoremei pot fi slăbite şi mai mult înlocuind condiţia lipschitziană cu una hölderiană adică de forma

$$||\Gamma_0[F'(\xi_1) - F'(\xi_2)]|| \leqslant K||\xi_1 - \xi_2||^\alpha$$

unde $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, iar, ξ_1, ξ_2 aparţin sferei $||X - X_0|| \leqslant 2\eta_0$

3. Funcţiile auxiliare $\Phi_i(A_i, C_i)$ se aleg în mod convenabil aşa fel încît constanta lipschitziană K să fie cît mai mică.

BIBLIOGRAFIE

1. Bela Jankó: *Despre rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii liniare infinite*, Studii şi Cercetări de Matematici, (Cluj) T.X, (1959).
2. Bela Jankó, D. Olteanu, V. David: *Asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii liniare prin metoda lui Newton*. (sub tipar).
3. L. V. Kantorovici: *O metode Nintona*. Trudi Inst. Steklova, XXVIII (1949) p. 127.
4. B. Jankó: *Metoda lui Newton şi rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare*, Studii şi Cercetări de Matematici (Cluj) anul VIII (1957).

Abstract

In this paper the authors give a generalisation of the results obtained in [1] and [2] concerning the solving of infinite systems of linear equations.