ASUPRA UNEI CLASE DE METODE ITERATIVE MODIFICATE CE SE APLICA LA REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE

de

A. GAIDICI

1. Fie ecuaţia

$$P(x) = \theta \tag{1.1}$$

unde $P(x)$ este operaţia neliniară ce transformă domeniul convex $S(x_0, R) = \{x \, \|x - x_0\| \leq R, \; x, \; x_0 \in X\}$ din spaţiul Banach X în spaţiul Y de acelaşi tip, θ fiind elementul nul a lui Y. Mai presupunem că în domeniul considerat opratia $P(x)$ este continuă şi derivabilă în sens Fréchet pînă la ordinul trei inclusiv.

Prin aplicarea unei metode iterative date reducem rezolvarea ecuaţiei (1.1) la rezolvarea ecuaţici liniare, iar în anumite condiţii şirul de elemente x_n generat de metoda respectivă converge către soluţia x^* a ecuaţiei (1.1). Evident, această soluţie are un caracter local, ca existînd în sfera cu centrul în x_0, a cărei rază R se obţine din condiţiile de convergenţă. În general, la rezolvarea ecuaţici (1.1) printr-o metodă interativă se impun următoarele: 1) determinarea domeniului unde soluţia există; 2) determinarea distanţei dintre soluţia exactă x^* şi aproximaţia x_n, adică $\|x_n - x^*\|$; 3) determinarea domeniului unde soluţia este unică.

Notăm prin $\Gamma(x)$ operaţia inversă a operatorului $P'(x)$, adică $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$, $x \in S(x_0, R)$. Să presupunem că în metoda iterativă respectivă ne folosim de operatorii $\Gamma(x)$, $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$, între care există o anumită legătură φ sau ψ, ce ne indică atît modul în care aplicăm aceşti operatori, cît şi elementele asupra cărora se aplică. Ele se prezintă sub una din formele

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, \Gamma(x_n), P(x_n), P'(x_n), P''(x_n)) \tag{a}$$

sau

$$x_{n+1} = \psi(x_n, \Gamma(x_0), P(x_n), P'(x_0), P''(x_0)) \tag{b}$$

numite metode de bază şi respectiv metode modificate [1].

Dintre acestea menţionăm pe cele mai des intîlnite. Astfel: metoda lui Newton-Kantorovici [1]

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) \tag{1_a}$$

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n) \tag{1_b}$$

metoda parabolelor tangente [2], [3]

$$x_{n+1} = x_n - H_{0,n}\,[I + A_n(x_n)]\Gamma_n P(x_n) \tag{2_a}$$

$$x_{n+1} = x_n - H_{0,0}\,[I + 2A_0(x_0) - A_0(x_n)]\Gamma_0 P(x_n) \tag{2_b}$$

metoda hiperbolelor tangente [4], [5]

$$x_{n+1} = x_n - H_{1,n}\,\Gamma_n P(x_n) \tag{3_a}$$

$$x_{n+1} = x_n - H_{1,0}[I - \frac{1}{2}\,\Gamma_0 P''(x_0)(x_n - x_0)]\Gamma_0 P(x_n) \tag{3_b}$$

metodele din [6] şi [7]

$$x_{n+1} = x_n - H_{2,n}\,[I - A_n(x_n))]\Gamma_n P(x_n) \tag{4_a}$$

$$x_{n+1} = x_n - H_{2,0}[I - (2A_0(x_0) - A_0(x_n)) - \Gamma_0 P''(x_0)(x_n - x_0]\,\Gamma_0 P(x_n) \tag{4_b}$$

metoda lui U. Kaazic [8]

$$x_{n+1} = x_n - H_{\lambda,n}[I + (1-\lambda)A_n(x_n)]\Gamma_n P(x_n) \tag{5_a}$$

iar pentru metoda modificată corespunzătoare lui (5_a) propunem

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - H_{\lambda,0}[I + (1-\lambda)(2A_0(x_0) - A_0(x_n)) - \\ - \frac{\lambda}{2}\,\Gamma_0 P''(x_0)(x_n - x_0)]\Gamma_0 P(x_n) \end{aligned} \tag{5_b}$$

În relaţiile $(1_a) - (5_b)$ am notat prin $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$,

$$A_n(x_n) = \frac{1}{2}\,\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n), \; A_0(x_n) = \frac{1}{2}\,\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P(x_n),$$

$H_{\lambda,n} = [I - \lambda A_n(x_n)]^{-1}$, I operatorul idetitate, iar λ un număr real

2. În cele ce urmează vom rezolva, în legătură cu ecuaţia (1.1), chestiunile menţionate la 1)—3), cu ajutorul metodei propuse (5_b).

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţia $x_0 \in X$ sînt îndeplinită următoarele condiţii:*

1° *există operatorii Γ_0, $H_{\lambda,0}$ pentru care avem delimitările*

$$\|\Gamma_0\| \leqslant B, \quad \|H_{\lambda,0}\| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{|\lambda|}{2}\,h(\lambda)}$$

2° $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta$

3° $\|P''(x)\| \leqslant M$, $\|P'''(x)\| \leqslant N$, $\forall x \in \bar{S}(x_0, 2\eta)$

4° $BM\eta = h(\lambda) \leqslant \dfrac{2}{3|1-\lambda| - |\lambda| + 5}$

5° $\dfrac{N}{BM^2} = \gamma(\lambda) \leqslant \dfrac{2 - |\lambda| h(\lambda) - 6(|\lambda| - 2|1-\lambda|)h^2(\lambda) - 24|1-\lambda|\, h^3(\lambda)}{4h^2(\lambda)[1 + |2|1-\lambda| + |\lambda||h(\lambda) + 2|1-\lambda|h^2(\lambda)]}$

atunc şirtul genera de (5_b) *converge către soluţia* $x^* \in \bar{S}(x_0, 2\eta)$ *a ecuaţiei* (1.1)

Demonstraţie. Din condiţiile 1° (prima inegalitate), 2°, 3° (prima inegalitate) şi 4° soluţia $x^* = \lim x_n$ există pe baza teoremei lui L.V. Kantorovici [1]. Tot pe baza acestor rezultate avem

$$\|x - x^*\| \leqslant \|x_1 - x^*\| \tag{2.1}$$

$$\|x - x_0\| \leqslant 2\eta, \quad x \in S(x_0, 2\eta) \tag{2.2}$$

TEOREMA 2. *Rapiditatea convergenţei şirului* x_n *generat de* (5_b) *către soluţia* x^* *este caracterizată de inegalitatea*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant q^n_{(\lambda)} \| x_0 - x^* \| \leqslant q^n(\lambda) 2\eta \tag{2.3}$$

Demonstraţie. Introducem operatorul

$$F(x) \equiv x - H_{\lambda,0}[I + (1-\lambda)(2A_0(x_0) - A_0(x)) - \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0)]\Gamma_0 P(x) \tag{2.4}$$

pentru care avem [9], [3], [5], [7]

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{2.5}$$

$$F(x^*) = x^* \tag{2.6}$$

$$F'(x_0) = 0,\ F''(x_0) = 0,\ 0 \text{ fiind operatorul nul} \tag{2.7}$$

$$F'''(\bar{x}) = -H_{\lambda,0}\Big\{(1-\lambda)\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P'''(\bar{x})[\Gamma_0 P(x_0) - \Gamma_0 P(\bar{x})] - 3(1-\lambda)\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P'(\bar{x})\Gamma_0 P''(\bar{x}) - \frac{3\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Gamma_0 P''(\bar{x}) + [I - \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(\bar{x} - x_0)]\Gamma_0 P'''(\bar{x})\Big\} \tag{2.8}$$

cu presupunerea că anumiţi operatori ce intervin sînt simetrici. Într-adevăr, (2.5) rezultă din compararea lui (2.4) cu (5_b), (2.6) este evidentă x^* fiind soluţia ecuaţiei (1.1) şi, în fine, (2.8) rezultă din derivatele succesive [9] ale lui (2.4). Astfel:

$$F'(x)\Delta x = \Delta x - H_{\lambda,0}\Big\{-[(1-\lambda)A'(x)\Delta x + \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Delta x]\Gamma_0 P(x) + [I + (1-\lambda)(2A_0(x_0) - A_0(x)) - \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0)]\Gamma_0 P'(x)\Delta x\Big\}$$

1—102

$$F''(x)\,\Delta_1 x\Delta_2 x = -H_{\lambda,0}\Big\{-(1-\lambda)A_0''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Gamma_0 P(x) - 2[(1-$$

$$-\lambda)A_0'(x)\Delta_1 x + \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Delta_1 x]\Gamma_0 P'(x)\Delta_2 x + [I + (1-\lambda)(2A_0(x_0) -$$

$$- A_0(x)) - \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(x - x_0)]\Gamma_0 P''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Big\}$$

$$F_0'''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Delta_3 x = -H_{\lambda,0}\Big\{-(1-\lambda)[A_0'''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Delta_3 x\Gamma_0 P(x) +$$

$$+ A_0''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Gamma_0 P'(x)\Delta_3 x] - 2(1-\lambda)A_0''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x\Gamma_0 P'(x)\Delta_3 x -$$

$$-3[(1-\lambda)A_0'(x)\Delta_1 x + \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\Delta_1 x]\Gamma_0 P''(x)\Delta_2 x\Delta_3 x +$$

$$+ [I + (1-\lambda)(2A_0(x_0) - A_0(x)) - \frac{\lambda}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(x -$$

$$- x_0)]\Gamma_0 P'''(x)\,\Delta_1 x\Delta_2 x\Delta_3 x\Big\}$$

Înlocuind în primele două relații pe x prin x_0 și ținînd seama de notațiile introduse, obținem (2.7), iar în ultima înlocuim pe x printr-un element x fixat din $S(x_0, 2\eta)$ și respectiv aceleași notații, obținem (2.8)

Arătăm că avînd inegalitățile (2.1) și (2.2), atunci vor fi adevărate și inegalitățile

$$\|F(x) - x^*\| \leqslant q(\lambda)\|x - x^*\|, \quad q(\lambda) < 1 \tag{2.9}$$

$$\|F(x) - x_0\| \leqslant 2\eta \tag{2.10}$$

Într-adevăr, pe baza lui (2.6) și formula generalizată a lui Lagrange avem:

$$\|F(x) - x^*\| = \|F(x) - F(x^*)\| \leqslant \sup_{\bar{x}\in \bar{S}} \|F'(\bar{x})\|\,\|x - x^*\| \tag{2.11}$$

În continuare, pe baza lui (2.7), obținem

$$\|F'(\bar{x})\| = \|F'(\bar{x}) - F'(x_0) - F''(x_0)(\bar{x} - x_0)\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\bar{x}\in \bar{S}} \|F'''(\bar{x})\|\,\|\bar{x} - x_0\|^2$$

Evaluăm, pe baza lui (2.8), norma expresiei lui $F'''(x)$ pentru $x \in \bar{S}$: din relația

$$\|\Gamma P(x) - \Gamma_0 P(x_0) - \Gamma_0 P'(x_0)(x - x_0)\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\bar{x}\in \bar{S}} \|\Gamma_0 P''(\bar{x})\|\,\|x - x_0\|^2$$

dar

$$\|\Gamma_0 P(x) - \Gamma_0 P(x_0) - \Gamma_0 P'(x_0)(x - x_0)\| \geqslant \|\Gamma_0 P(x) - \Gamma_0 P(x_0)\| -$$

$$- \|x - x_0\|$$

deci

$$\|\Gamma_0 P(x) - \Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\bar{x}\in \bar{S}} \|\Gamma_0 P''(\bar{x})\|\,\|x - x_0\|^2 + \|x - x_0\|$$

iar pe baza condițiilor teoremei 1 și a relației (2.2) obținem

$$\|\Gamma_0 P(x) - \Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant 2(1 + k)\eta \tag{2.12}$$

De asemenea, din inegalitățile

$$\|\Gamma_0 P'(x)\| - \|\Gamma_0 P'(x_0)\| \leqslant \|\Gamma_0 P'(x) - \Gamma_0 P'(x_0)\| \leqslant \sup_{\bar{x} \in \bar{S}} \|\Gamma_0 P''(\bar{x})\| \, \|x - x_0\|$$

și din aceleași condiții avem

$$\|\Gamma_0 P'(x)\| \leqslant 1 + 2k \tag{2.13}$$

Din (2.8), (2.12) și (2.13) rezultă

$$\frac{1}{2} \sup_{\bar{x} \in \bar{S}} \|F'''(\bar{x})\| \, \|x - x_0\|^2 \leqslant \frac{2k^2}{2 - |\lambda| k} [6 |1 - \lambda| (1 + 2k) + 3|\lambda| + 2\gamma(2|1 -$$
$$- \lambda| k (1 + k) 1 + |\lambda| k + 1)]$$

Notăm prin

$$q(\lambda) = \frac{2k^2}{2 - |\lambda| k} [6|1 - \lambda|(1 + 2k) + 3|\lambda| + 2\gamma(2|1 - \lambda| k(1 + k) + |\lambda| k + 1]$$

(am scris simplu k în loc de $k(\lambda)$ pentru a simplifica scrierea) Introducem expresia lui $q(\lambda)$ în relația (2.11) și obținem (2.9), în care înlocuim pe x cu x_{n-1} și pe baza lui (2.5) avem

$$\|x_n - x^*\| \leqslant q(\lambda) \|x_{n-1} - x^*\|$$

De unde obținem

$$\|x_n - x^*\| \leqslant q^n(\lambda) \|x_0 - x^*\| \tag{2.14}$$

Trecem la inegalitatea (2.10). Vom face uz de (2.4) și (2.7)

$$\|F(x) - x_0\| = \|F(x) - \{F(x_0) + H_{\lambda,0} [I + (1 - \lambda) A_0(x_0)]_0 P(x_0)\}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} F''(x_0)(x - x_0)^2\| +$$
$$+ \|H_{\lambda,0} [I + (1 - \lambda) A_0(x_0)] \Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3} \sup_{\bar{x} \in \bar{S}} \|F'''(\bar{x})\| \, \|x -$$
$$- x_0\|^3 + \|[I + H_{\lambda,0} A_0(x_0)] \Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{k}{2 - |\lambda| k}\right)\eta$$

Se verifică prin calcul direct că pentru k delimitat de condiția 4° a teoremei 1, această expresie este mai mică decît 2η. Așadar inegalitatea (2.10) este demonstrată.

Din (2.10) și (2.6) avem

$$\|x^* - x_0\| \leqslant 2\eta \tag{2.15}$$

iar din aceasta împreună cu (2.14) rezultă (2.3). Trecînd la limită în (2.3) obținem $\lim x_n = x^*$. În concluzie, șirul $\{x_n\}$ generat de (5_λ) converge către soluția x^* a ecuației (1.1)

TEOREMA 3. *În condițiile teoremei 1 soluția x^* este unică în sfera $\bar{S}(x_0, 2\eta)$.*

Într-adevăr, dacă τ ar fi o altă soluție a ecuației (1.1) din sfera $\bar{S}(x_0, 2\eta)$ atunci repetînd raționamentul de mai sus obținem

$$\|x_n - \tau\| = \|F(x_{n-1}) - F(\tau)\| \leq \sup_{\bar{x} \in \bar{S}} \|F'(\bar{x})\| \, \|x_n - \tau\|$$

sau

$$\|x_n - \tau\| \leq q(\lambda) \|x_{n-1} - \tau\|$$

adică

$$\|x_n - \tau\| \leq q^{n-1}(\lambda) \|x_0 - \tau\|$$

de unde avem $\lim x = \tau$. Deoarece șirul $\{x_n\}$ are o singură limită rezultă $x^* = \tau$. Teorema este demonstrată.

OBSERVAȚII.

1) Impunînd condiția $q(\lambda) < 1$ obținem condiția 5° a teoremei 1.

2) Avînd în vedere că $r > 0$, numitorul fiind pozitiv, din condiția ca și numărătorul să fie pozitiv obținem condiția 4° a teoremei 1. În același timp $h(\lambda)$ trebuie determinat astfel încît să obținem cazurile particulre pentru $\lambda = 0, 1, 2,$; adică va fi de forma

$$h(\lambda) \leq \frac{1}{a|1-\lambda| + b|\lambda| + c}.$$

Atunci obținem sistemul:

$$\begin{aligned} a|1-\lambda| + b|\lambda| + c &\geq 4, & \lambda &= 0, \\ a|1-\lambda| + b|\lambda| + c &> 2, & \lambda &= 1 \\ a|1-\lambda| + b|\lambda| + c &\geq 3, & \lambda &= 2 \end{aligned}$$

determinînd coeficienții a, b, c găsim expresia lui $h(\lambda)$ din condiția 4° a teoremei 1.

3) Din determinarea lui $h(\lambda)$ rezultă $|\lambda| h < 2$ pentru $\|H_{\lambda, 0}\|$ din condiția 1° a teoremei 1.

4) În condiția 4° pentru $\lambda = 1$, $h(\lambda)$ se delimitează printr-o inegalitate strictă.

5) Firește, e necesar să știm cînd este mai avantajos să aplicăm metoda propusă (5_λ) pentru un λ dat, decît metoda (1_λ)? Pentru a răspunde la această întrebare comparăm rapiditatea convergenței celor două metode.

Făcînd raportul dintre $q(\lambda)$ şi $q_N = 1 - \sqrt{1 - 2h}$ avem

$$\frac{q(\lambda)}{q_N} = \frac{h(1 + \sqrt{1 - 2h})}{2 - |\lambda| h} \{3[2|1 - \lambda|(1 + 2h) + |\lambda|] + 2\gamma[2|1 - \lambda| h^3 + (2|1 - \lambda| + |\lambda|)h + 1]\}$$

iar din condiţia $q(\lambda)/q_N < 1$ determinăm din nou expresia lui γ şi procedînd ca în cazul observaţiei 2) găsim delimitarea pentru $h(\lambda)$. În cazul particular $\lambda = 1$ acest calcul este dat în [5].

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона* Тр. мат. ин-та имени Стеклова т. 28, 1949, 104–144
2. М. И. Нечепуренко, *О методе Чебышева для функциональных уравнений* У.М.Н., т. 2, 19, 1954, 163–170.
3. Р.А. Шафиев, *Об одной модификации метода Чебышева* Ж. вычисл. мат. и мат. физ., т. 3, № 5, 1963, 1950–953.
4. М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений* Д.А.Н. СССР, т. 88, № 4, 1953, 611–614.
5. Р. А. Шафиев, *Об одной модификации метода касательных гипербол* Д.А.Н. Азерб. ССР, т. 19, № 1, 1963, 3–8.
6. L. K. Vohandu, *Iteratsioonimeetoditest võrrandite lahendamisel*, Dissertatsioon, Tartu, 1955
7. Gaidici A., Pornvald F., *Despre o modificare a unui procedeu iterativ pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*. Buletin ştiinţific, ser. B, vol. 3, Institutul ped. Baia-Mare.
8. Ю. Я. Каазик, *Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений* Д.А.Н. СССР, т. 112, № 4, 1957, 579–582.
9. М. К. Гаврурин, *Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований* Уч. зап. Л.Г.У, сер. мат. наук. вып. 19, 1950, 59–154.

ON A CLASS OF MODIFIED ITERATIVE METHOD WICH IS APPLIED FOR SOLVING THE NONLINEAR OPERATIONAL EQUATIONS

Abstract

In this paper we give a modified iterative method for solving operational equations in Banach spaces. This method corresponds to the base method given in [8]. For $\lambda = 0, 1, 2$ we obtain the results from [3], [5], [7].