O PROPRIETATE A MULŢIMILOR DE PUNCTE DIN PLAN

de

AUREL IOANOVICIU

Fiind date mulţimile de puncte dintr-un plan, nu toate coliniare, vom nota cu α clasa mulţimilor de puncte de putere α. Vom nota cu $s(M)$ şi $S(M)$ ariile triunghiurilor cu aria cea mai mică, respectiv cea mai mare, ale căror vîrfuri aparţin mulţimii M:

$$s(M) = \inf_{A,B,C\in M} (ABC)$$

$$S(M) = \sup_{A,B,C\in M} (ABC)$$

Introducem încă notaţiile:

$$\sigma(M) = \frac{s(M)}{S(M)},$$

$$\sigma_\alpha = \sup_{M\in\alpha} \sigma(M)$$

Teorema 1. *Numerele σ_α sînt nenegative şi mai mici decît unitatea:*

$$0 \leqslant \sigma_\alpha \leqslant 1.$$

Teorema 2. *Mulţimea de numere σ_α este total ordonată de relaţia:*

$$\sigma_\alpha \leqslant \sigma_\beta \qquad \text{dacă} \quad \alpha < \beta$$

Teorema 3. *σ_α este nul, dacă α este un număr cardinal transfinit.*

Demonstraţie. Fie $M \in \alpha$, α transifinit. Vom deosebi două cazuri, după cum diametrul mulţimii M este finit sau nu.

1. Dacă diametrul mulţimii M este finit, atunci ea are cel puţin un punct de acumulare, A. Fie $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ un şir de puncte din M, $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\} \subseteq M$, care tinde către A:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Atunci aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ tinde către zero :

$$\lim_{n\to\infty}(A_nA_{n+1}A_{n+2}) = 0,$$

deci $s(M) = 0$.

Întrucît punctele mulţimii M nu sînt toate coliniare, există cel puţin un triunghi a cărui arie este diferită de zero, deci $S(M) \neq 0$. Atunci :

$$\sigma(M) = \frac{s(M)}{S(M)} = 0$$

şi :

$$\sup_{M\in\alpha} \sigma(M) = 0.$$

2. Dacă diametrul mulţimii M nu este finit, atunci, A fiind un punct arbitrar din $M, A \in M$, există un şir de puncte $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ din M, $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\} \subseteq M$, astfel ca distanţa $\mathrm{d}(A, A_n)$ să tindă către infinit :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(A, A_n) = \infty.$$

Vom deosebi din nou două cazuri :

a. Există un subşir $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ al şirului $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ astfel încît începînd de la un rang oarecare p, punctele $B_p, B_{p+1}, \ldots$ sînt situate pe o dreaptă a, sau se apropie asimptotic de dreapta a. În acest caz, există două puncte $C \in M$, $D \in M$ astfel încît dreptele a şi (C, D) să nu fie paralele. Atunci :

$$\lim_{n\to\infty}(CDB_n) = \infty,$$

deci $S(M) \to \infty$.

b. Nu există nici un subşir al şirului $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ cu proprietatea de la punctul a. În acest caz, oricare ar fi două puncte $B \in M$, $C \in M$, avem :

$$\lim_{n\to\infty}(BCA_n) = \infty,$$

deci $S(M) \to \infty$.

Deoarece, atît în cazul a cît şi b, $s(M)$ este finit, rezultă că $\sigma(M) \to 0$ şi $\sigma_\alpha = 0$.

Teorema 4. *Şirul* σ_α, ($\alpha = 3, 4, \ldots, n, \ldots$) *este un şir necrescător, cu termeni pozitivi.*

Demonstraţie. Să arătăm că $\sigma_\alpha \geq \sigma_{\alpha+1}$. Conform definiţiei lui $\sigma_{\alpha+1}$ există în clasa $\alpha + 1$ cel puţin o mulţime M astfel încît :

$$\frac{s(M)}{S(M)} = \sigma_{\alpha+1}.$$

Să notăm cu $A, B, C \in M$, cele trei vîrfuri ale triunghiului (sau ale unuia din triunghiurile — dacă există mai multe) de arie maximă din

M. Întrucît $\alpha \geqslant 3$, $\alpha + 1 \geqslant 4$, există $D \in M$ astfel ca $D \neq A$, $D \neq B$, $D \neq C$. Mulţimea $N = M - (D)$ aparţine clasei α, $N \in \alpha$. Vom avea $\sigma_\alpha \geqslant \sigma(N)$. Dar $\sigma(N) \geqslant \sigma(M) = \sigma_{\alpha+1}$. Rezultă $\sigma_\alpha \geqslant \sigma_{\alpha+1}$.

Oricare ar fi numărul natural α, există o mulţime M de α puncte din plan astfel încît să nu existe trei puncte coliniare. Atunci $s(M) > 0$, deci $\sigma_\alpha > 0$.

Teorema 5. $\sigma_3 = \sigma_4 = 1$.

Demonstraţie. 1. Pentru σ_3 este evident.

2. Pentru σ_4 este suficient să considerăm mulţimea $M \in 4$, formată din cele patru vîrfuri ale unui paralelogram. Cele patru triunghiuri care se pot forma cu cele patru puncte luate cîte trei, au toate ariile egale. Atunci $s(M) = S(M)$, deci:

$$\sigma(M) = 1, \qquad M \in 4.$$

Adăugînd la această relaţie definiţia lui σ_α şi teorema 1, se obţine $\sigma_4 = 1$.

Observaţie. Pentru a păstra proprietatea de monotonie a şirului σ_α, $(\alpha = 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ şi pentru a completa acest şir, vom pune prin definiţie:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1.$$

Teorema 6. $\sigma_5 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că există o mulţime $M \in 5$, astfel ca $\sigma(M) = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, iar apoi, că pentru orice altă mulţime $N \in 5$, $\sigma(N) \leqslant \sigma(M)$. Atunci $\sigma_5 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

1. Fie ABC un triunghi oarecare (fig. 1) şi AH înălţimea acestui triunghi. Pe AH luăm punctul M astfel ca:

$$\frac{AM}{MH} = \frac{\sqrt{3} - 5}{2}.$$

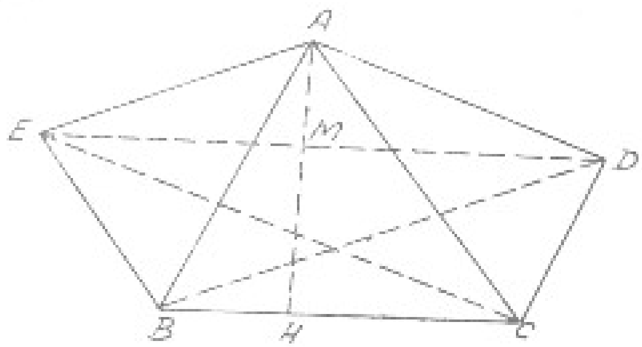

fig. 1

Paralela dusă prin M la BC se intersectează cu paralel adusă prin B la AC în E şi cu paralela dusă prin C la AB în D. Fie $M = \{A, B, C, D, E\}$, şi să calculăm pe $\sigma(M)$. Vom nota $BC = a$, $AH = h$. Se obţine:

$$\mathrm{AM} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}h, \quad \mathrm{MH} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}h, \ \mathrm{DE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

De aici şi din AB‖CD, ED‖BC, AC‖BE rezultă:

$$(\mathrm{ACD}) = (\mathrm{BCD}) = (\mathrm{BCE}) = (\mathrm{ABE}) = \frac{BC \cdot MH}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\ ah,$$

$$(\mathrm{AED}) = \frac{ED \cdot AM}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\ ah,$$

deci (ADE) = (ABE) = (ACD), de unde AE‖BD, AD‖CE. De asemenea:

$$(\mathrm{ABC}) = (\mathrm{ABD}) = (\mathrm{BDE}) = (\mathrm{CDE}) = (\mathrm{ACE}) = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Rezultă:

$$s(\mathrm{M}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{ah}, \ S(\mathrm{M}) = \frac{ah}{2}, \ \sigma(\mathrm{M}) = \frac{s(M)}{S(M)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61803$$

2. Fie acum o mulţime arbitrară $\mathrm{N} \in 5$ şi ABC triunghiul cu aria maximă (sau unul dintre ele, dacă sînt mai multe) avînd ca vîrfuri puncte din N: $\mathrm{A} \in \mathrm{N}$, $\mathrm{B} \in \mathrm{N}$, $\mathrm{C} \in \mathrm{N}$. Să construim ca la punctul 1, punctele D şi E (fig. 2). De asemenea, prin vîrfurile triunghiului ABC să ducem paralele cu laturile opuse, care se intersectează respectiv în P, Q, R, iar prin D şi E să ducem respectiv paralelele DF şi EG la AC şi AB. Mulţimea $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}\} = \mathrm{N}' \in 5$ şi conform celor precedente avem

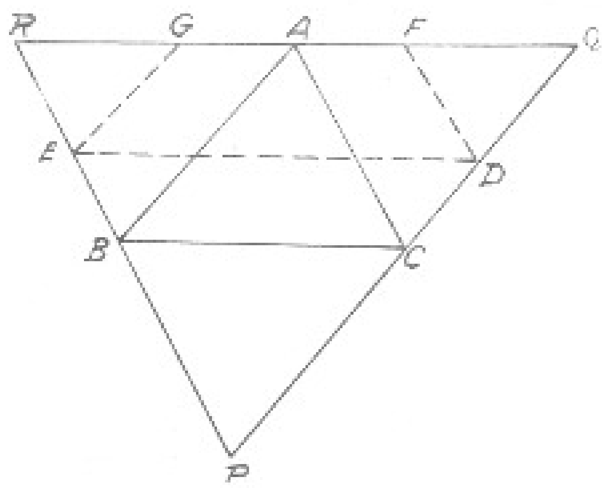

fig. 2

$\sigma(N') = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Mulţimea N nu poate avea nici un punct în exteriorul triunghiului PQR întrucît am presupus că triunghiul ABC are aria maximă. De asemenea, dacă N conţine un punct D' în interiorul triunghiului ABC, atunci cel puţin una din ariile (ABD'), (ACD'), (BCD') ar fi mai mică decît o treime din (ABC), deci am avea $\sigma(N) \leqslant \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pentru a putea avea $\sigma(N) > \sigma(M)$, celelalte două puncte $D' \in N$, $E' \in N$ nu ar putea fi situate decît în interiorul triunghiurilor ARB, BPC, CQA. Există două posibilităţi: punctele D', E' să aparţină unuia din aceste triunghiuri sau să fie situate în două triunghiuri diferite.

Dacă punctele D', E' aparţin ambele unuia din aceste triunghiuri, de exemplu lui BPC se arată imediat că în cel mai bun caz $\sigma(N) = \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Să analizăm în fine cazul în care punctele D', E' aparţin la două triunghiuri diferite, de exemplu CQA şi ARB. Dacă punctul D' este situat în interiorul trapezului AFDC, am avea:

$$(AD'C) < (ADC) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(ABC), \quad \sigma(N) \leqslant \frac{(AD'C)}{(ABC)} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Din aceleaşi considerente, dacă E' este interior trapezului AGEB, avem $\sigma(N) < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

În sfîrşit, dacă D' şi E' aparţin respectiv triunghiurilor FQD şi GRE avem:

$$(AD'E') \leqslant (AD'E) \leqslant (ADE) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(ABC),$$

egalitatea avînd loc numai dacă D', E' coincid respectiv cu D, E, deci:

$$\sigma(N) \leqslant \frac{(AD'E')}{(ABC)} \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Întrucît din analiza efectuată rezultă că oricare ar fi $N \in 5$ avem $\sigma(N) \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ şi există $M \in 5$ astfel ca $\sigma(M) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, vom avea:

$$\sigma_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Teorema 7. $\sigma_6 = \frac{1}{3}$.

Demonstraţie. Vom proceda ca la teorema 6.

1. ACE fiind un triunghi oarecare (fig. 3), paralelele duse prin vîrfurile triunghiului la laturile opuse, formează triunghiul PQR şi fie B, D, F respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ARC, CPE, EQA. Să considerăm mulţimea $M = \{A, B, C, D, E, F\} \in 6$.

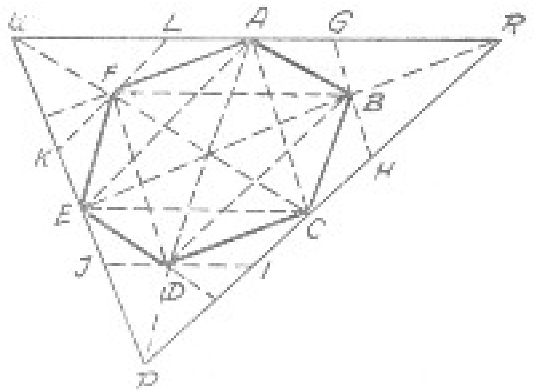

fig. 3

Se arată imediat că avem:

$$s(M) = (ABC) = (ABF) = (AEF) = (BCD) = (CDE) = (DEF) = \frac{1}{3} S(M),$$

$$(ABD) = (ABE) = (ACD) = (ACF) = (ADE) = (ADF) = (BCE) =$$

$$= (BCF) = (BDE) = (BEF) = (CDF) = (CEF) = \frac{2}{3} S(M),$$

$$S(M) = (ACE) = (BDF),$$

de unde:

$$\sigma(M) = \frac{s(M)}{S(M)} = \frac{1}{3}.$$

2. Fie acum o mulţime arbitrară $N \in 6$ şi ACE triunghiul de arie maximă (sau unul dintre ele), avînd ca vîrfuri puncte din N, $A \in N$, $C \in N$, $E \in N$. Construim ca la punctul 1, triunghiul PQR şi punctele B, D, F (fig. 3). Mulţimea N nu poate conţine nici un punct exterior triunghiului PQR, pentru că, în acest caz, contrar ipotezei, triunghiul ACE nu ar avea aria maximă.

Dacă există un punct $B' \in N$ în interiorul triunghiului ACE, sau dacă unul dintre triunghiurile ARC, CPE, EQA conţine două puncte $B' \in N$, $D' \in N$, atunci se arată ca la teorema precedentă că $\sigma(N) \leq \frac{1}{3}$, respectiv $\sigma(N) \leq \frac{1}{4}$.

Să analizăm în fine cazul în care punctele $B' \in N$, $D' \in N$, $F' \in N$ sînt situate respectiv în interiorul triunghiurilor ARC, CPE, EQA. Să ducem prin B, D, F respectiv paralelele GH, IJ, KL cu AC, CE, EA. Dacă unul din punctele B', D', F' este situat respectiv în interiorul unuia din trapezele AGHC, CIJE, EKLA, atunci unul din triunghiurile AB'C, CD'E, EF'A ar avea aria mai mică respectiv decît unul din triunghiurile ABC, CDE, EFA şi am avea $\sigma(N) < \frac{1}{3}$.

Dacă B' este în interiorul triunghiului RBH şi D' în interiorul triunghiului IDP avem:

$$(B'CD') < (BCD') < (BCD),$$

deci

$$\sigma(N) < \frac{1}{3}.$$

Dacă B', D', F' sînt situate respectiv în interiorul triunghiurilor BRH, DPJ, FQL (sau pe laturile lor), să ducem prin B', D', F' paralele cu RB, PD, QF care se intersectează cu segmentele BH, DJ, FL respectiv în B_1, D_1, F_1. Vom avea:

$$(B'D'F') \geqslant (B_1, D_1, F_1),$$

egalitatea putînd avea loc numai dacă B', D', F' coincid respectiv cu B_1, D_1, F_1. Avem încă:

$$(B_1D_1F_1) \geqslant (B_1D_1F) \geqslant (B_1DF) = (BDF)$$

unde avem egalitate numai dacă F_1, D_1 coincid respectiv cu F, D. Rezultă că:

a. Dacă D' este diferit de D, sau F' este diferit de F, sau B' diferit de B_1 (adică B' nu aparţine segmentului BH) vom avea

$$(B'D'F') > (BDF) = (ABC),$$

ceea ce este imposibil, întrucît am presupus că ABC este triunghiul de arie maximă din N.

b. Dacă D' coincide cu D, F' coincide cu F şi B' este situat pe segmentul BH, vom avea:

$$(DCB') \leqslant (DCB),$$

deci:

$$\sigma(N) \leqslant \frac{(DCB')}{(ABC)} \leqslant \frac{(DCB)}{(ABC)} = \frac{1}{3},$$

egalitatea avînd loc numai în cazul cînd punctele B' şi B coincid.

Analog se analizează cazul cînd B' este situat în interiorul triunghiului BRG.

Întrucît pentru orice $N \in 6$ avem $\sigma(N) \leqslant \frac{1}{3}$ şi există $M \in 6$ astfel ca $\sigma(M) = \frac{1}{3}$, vom avea $\sigma_6 = \frac{1}{3}$.

Observaţie. Nu este întîmplător că atît la teorema 6 cît şi la teorema 7, toate rezultatele obţinute sînt independente atît în raport cu forma triunghiului iniţial considerat cît şi cu dimensiunile lui. Această independenţă este datorată faptului că raportul a două arii — ca de altfel, mai general, raportul a două lungimi — este un invariant afin.

Întrucît o afinitate este determinată de trei perechi de puncte, două triunghiuri sînt întotdeauna afin congruente.

Bazați pe această observație, puteam considera la teorema 6 ca triunghi inițial, triunghiul NQR din pentagonul regulat convex NPQRS și am fi obținut prin construcția făcută chiar pentagonul regulat; la teorema 7, luînd triunghiul inițial ACE echilateral, am fi obținut hexagonul regulat convex ABCDEF.

În transformarea afină efectuată, cercurile circumscrise poligoanelor regulate, se transformă în elipse. Rezultă că pentagonul ADCBE (teorema 6) și hexagonul ABCDEF (teorema 7) sînt inscriptibile în cîte o elipsă. Pentru pentagon rezultatul este banal, orice pentagon convex fiind inscriptibil într-o elipsă. Pentru hexagon se poate demonstra și direct că este inscriptibil într-o elipsă, al cărei centru este situat la intersecția diagonalelor AD, BE, CF.

Teorema 8. $\sigma_7 = \alpha - \alpha^2 \approx 0{,}24698$, *unde* $\alpha \approx 0{,}44504$ *este rădăcina cuprinsă între* 0 *și* 1 *a ecuației* $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$.

Demonstrație. 1. ACF fiind un triunghi oarecare (fig. 4), pe prelungirea înălțimii $AH = h$, construim punctul K, astfel încît:

$$KH = (1 - \alpha)h.$$

Paralelele duse prin C, F respectiv la AF, AC se intersectează cu paralela dusă prin K la CF în D, E. Paralela dusă prin D la AC se intersectează cu paralela dusă prin F la AE în G; paralela dusă prin E la AF se intersectează cu paralela dusă prin C la AD în B. Fie M = {A, B, C, D,

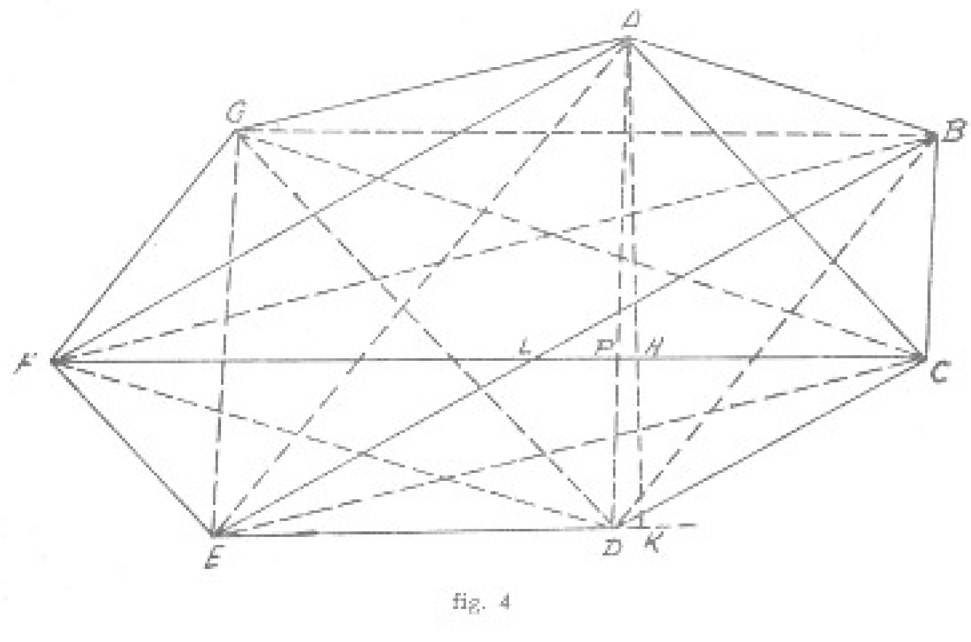

fig. 4

E, F, G) $\in$ 7. Din asemănarea triunghiurilor LBC, FAP, CDP, unde L, P sînt respectiv intersecțiile perechilor de drepte CF, BE; CF, AD rezultă:

$$\mathrm{FP} = \frac{FC}{2-\alpha}, \quad \mathrm{PC} = \frac{FC(1-\alpha)}{2-\alpha}, \quad \mathrm{h}' = \frac{(2-\alpha)h \cdot LC}{FC},$$

unde h' este înălțimea din B a triunghiului LBC. Din asemănarea triunghiurilor ACF și EFL rezultă FL = FC$(1-\alpha)$ deci:

$$\mathrm{LC} = \alpha \cdot \mathrm{FC}, \quad \mathrm{h}' = \alpha(2-\alpha)\mathrm{h}.$$

Vom avea:

$$2(\mathrm{ACD}) = \mathrm{CP} \cdot \mathrm{AK} = \mathrm{FC}(1-\alpha)\mathrm{h},$$

$$2(\mathrm{BDE}) = \mathrm{DE}(\mathrm{h}' + \mathrm{HK}) = \mathrm{LC}(\mathrm{h}' + \mathrm{HK}) = \mathrm{FC}(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)\mathrm{h} =$$
$$= \mathrm{FC}(1-\alpha)\mathrm{h},$$

deci:

$$(\mathrm{ACD}) = (\mathrm{BDE}).$$

Asemănător se arată că:

$$(\mathrm{AEF}) = (\mathrm{GDE}).$$

Din aceste două relații și din construcții rezultă:

$$(\mathrm{ABC}) = (\mathrm{BCD}) = (\mathrm{CDE}) = (\mathrm{DEF}) = (\mathrm{EFG}) = (\mathrm{FGA}) = (\mathrm{GAB}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{ED} \cdot \mathrm{HK} = \frac{1}{2}\,(1-\alpha)\mathrm{h} \cdot \mathrm{FC},$$

$$(\mathrm{ABD}) = (\mathrm{BDE}) = (\mathrm{DEG}) = (\mathrm{EGA}) = (\mathrm{GAC}) = (\mathrm{ACD}) = (\mathrm{CDF}) =$$
$$= (\mathrm{DFG}) = (\mathrm{FGB}) = (\mathrm{GBC}) = (\mathrm{BCE}) = (\mathrm{CEF}) = (\mathrm{EFA}) =$$
$$= (\mathrm{FAB}) = \frac{1}{2}\,(1-\alpha)h \cdot \mathrm{FC},$$

$$(\mathrm{AEB}) = (\mathrm{EBF}) = (\mathrm{BFC}) = (\mathrm{FCG}) = (\mathrm{CGD}) = (\mathrm{GDA}) = (\mathrm{DAE}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{FC} \cdot h' = \frac{1}{2}\,\alpha(2-\alpha)h \cdot \mathrm{FC},$$

$$(\mathrm{ACE}) = (\mathrm{ECG}) = (\mathrm{EGB}) = (\mathrm{GBD}) = (\mathrm{BDF}) = (\mathrm{DFA}) = (\mathrm{FAC}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,h \cdot \mathrm{FC},$$

deci $s(M) = \frac{1}{2}\,\alpha(1-\alpha)h \cdot \mathrm{FC}$, $S(M) = \frac{1}{2}\,h \cdot \mathrm{FC}$, $\sigma(M) = \alpha - \alpha^2$.

2. Pentru a dovedi că $\sigma(M) = \sigma_7$, trebuie să arătăm că pentru orice mulțime $N = \{A, B, C, D, E, F, G\} \in 7$, vom avea $\sigma(N) \leq \sigma(M)$. Fie $N \in 7$ o mulțime arbitrară și ACF triunghiul (sau unul dintre ele) de arie

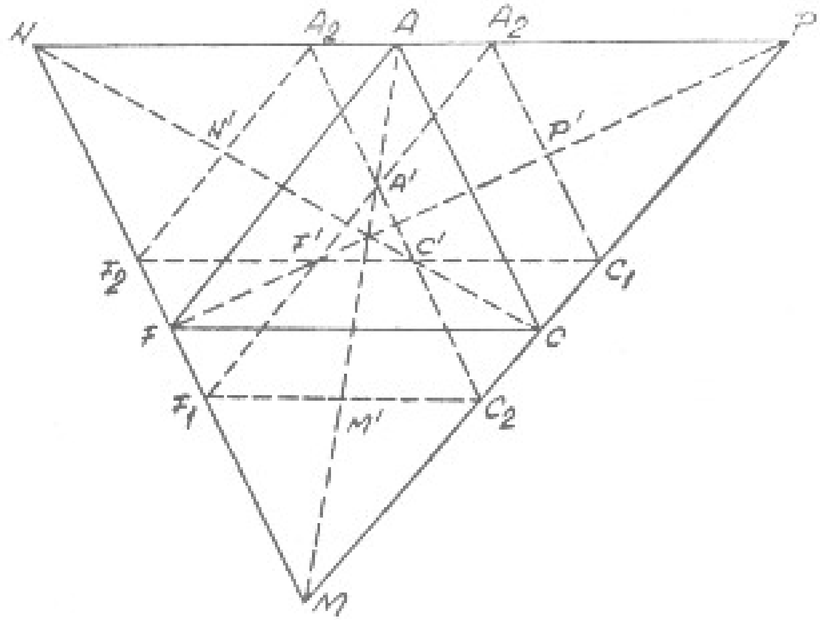

fig. 5

maximă (fig. 5). Ducem prin vîrfurile triunghiului paralele cu laturile opuse, care determină triunghiul MNP. Fie A_1 un punct pe segmentul AN astfel încît $AA_1 = (\alpha - \alpha)^2 AN$. Construim $A_1F_2 \| AF$, $F_2C_1 \| FC$, $C_1A_2 \| CA$, $A_2F_1 \| AF$, $F_1C_2 \| FC$ $C_2A_1 \| CA$, care se intersectează respectiv în A', C', F' (vezi figura) și să notăm cu M', N', P' punctele de intersecție ale dreptelor AM, CN, FP respectiv cu F_1C_2, A_1F_2, C_1A_2. Nici unul dintre punctele B, D, E, G nu poate fi exterior triunghiului MNP, pentru că, în acest caz, ar exista un triunghi a cărui arie ar depăși aria triunghiului ACF, ceea ce este contrar ipotezei. Dacă unul din aceste puncte ar fi situat în interiorul hexagonului $A_1F_2F_1C_2C_1A_2$ dar exterior triunghiului $A'C'F'$, ar exista un triunghi a cărui arie este mai mică decît (ACF) · $\sigma(M)$ și am avea $\sigma(N) < \sigma(M)$. Mai rămin de examinat următoarele cazuri : a. punctele B, D, E, G situate respectiv în interiorul triunghiurilor $A'C'F'$, $PP'C_1$, $MM'C_2$, $NN'A_1$; b. punctele B, D, E, G situate respectiv în interiorul triunghiurilor $A'C'F'$, $PP'A_2$, $MM'C_2$, $NN'F_2$; c. punctele D, E în interiorul triunghiului MF_1C_2 și B, G respectiv în PC_1A_2, NA_1F_2. Toate celelalte cazuri posibile, ori se reduc la unul din acestea trei, pe baza observației de la teorema 7, ori se arată simplu că $\sigma(N) < \sigma(M)$.

a. Vom presupune că punctele P, D nu sînt situate de aceeași parte a dreptei FB, în această situație arătîndu-se imediat că $\sigma(N) < \sigma(M)$.

Fie C_1' simetricul punctului C în raport cu C_1 (fig. 5a, cu notațiile de la fig. 5). Paralela dusă prin C_1' la FC_1 se intersectează cu $A'F'$, $A'C'$ respectiv în punctele Q_1, R_1. Dacă punctul B este situat în interiorul patrulaterului $F'Q_1R_1C'$, atunci $(FBD) < (\alpha - \alpha^2)(ACF)$, deci $\sigma(N) < \sigma(M)$. Să considerăm deci punctul B în interiorul triunghiului $A'Q_1R_1$. Fie în acest

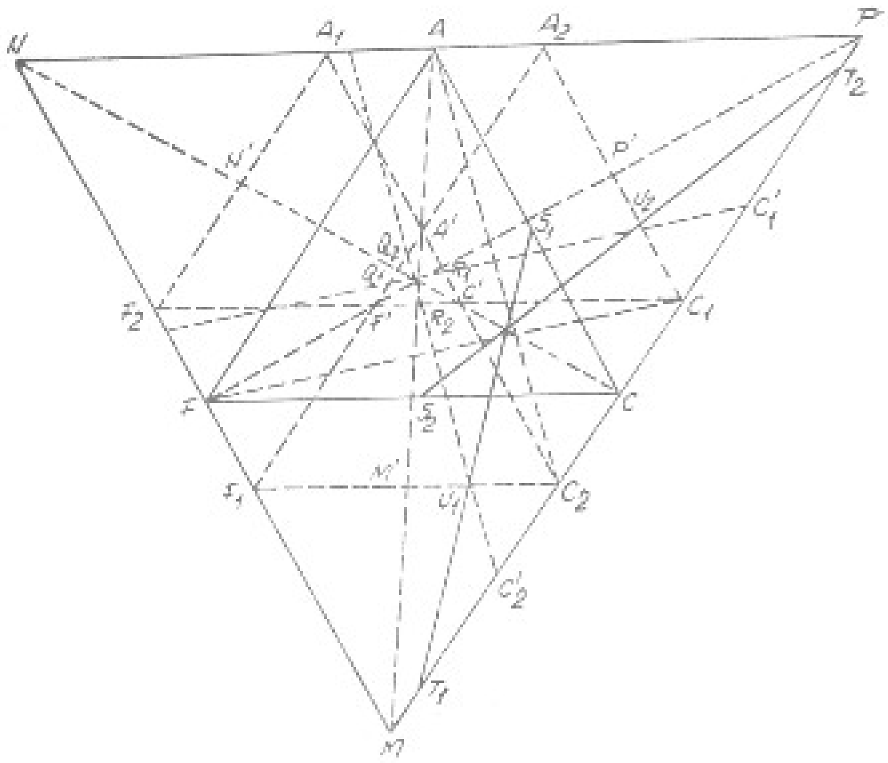

Fig. 5 a

caz S_1 punctul de pe segmentul AC pentru care $(AS_1\mathbf{Q}_1) = (\alpha - \alpha^2)(ACF)$ şi prin S_1 să ducem paralela S_1T_1 la $A\mathbf{Q}_1$, care se intersectează cu F_1C_2 în U_1. Punctul E trebuie să aparţină triunghiului $C_2U_1T_1$, altfel $(ABE) < (\alpha - \alpha^2)(ACF)$ şi din nou $\sigma(N) < \sigma(M)$. Analog se obţin punctele $\mathbf{Q}_2$, R_2, S_2, T_2, U_2 şi punctul D trebuie să fie situat în interiorul triunghiului $C_1U_2T_2$. Un calcul elementar ne dă $CS_2 = \alpha \cdot CF$, $CS_1 = \alpha \cdot CA$, $CT_1 = CT_2 = (1 - \alpha^2)AF$ şi, oriunde ar fi situate punctele D, E (în triunghiurile respective) vom avea $(DCE) < (\alpha - \alpha^2)(ACF)$ deci $\sigma(N) < \sigma(M)$.

b. Putem considera — fără a restringe generalitatea demonstraţiei, pe baza observaţiei de la teorema 7 — că punctul B este interior triunghiului A'HF', unde H este centrul de greutate al triunghiului ACF, (fig. 5b, cu notaţiile de la fig. 5). Fie $\mathbf{Q}$, T două puncte situate respectiv pe FC şi AF astfel încît:

$$(THF) = (\mathbf{Q}A'F) = (\alpha - \alpha^2)(ACF).$$

Paralela dusă prin $\mathbf{Q}$ la FA' se intersectează cu FP, NP în S, R; paralela dusă prin T la FH se intersectează cu A_2C_1, NP în V, U. Punctul D poate fi situat numai în interiorul triunghiurilor A_2VU sau SRP, altfel $(FBD) < (\alpha - \alpha^2)(ACF)$ şi $\sigma(N) < \alpha - \alpha^2$. Punctele U, R sînt deter-

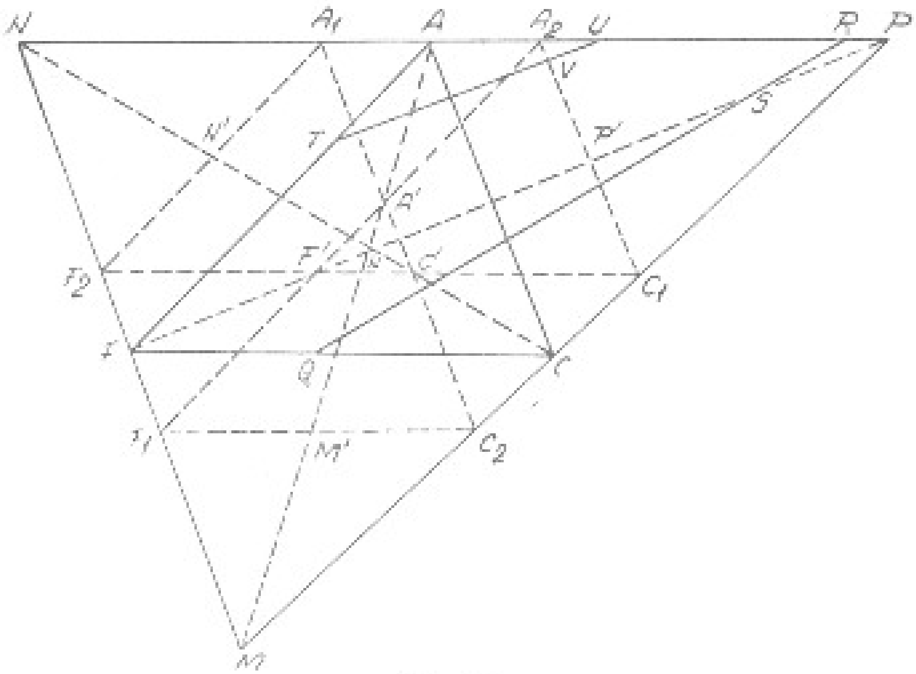
N
A1
A
A2
U
R
P
V
N'
T
P'
S
A'
F'
C'
F2
C1
F
Q
C
F1
M'
C2
M

Fig. 5 b

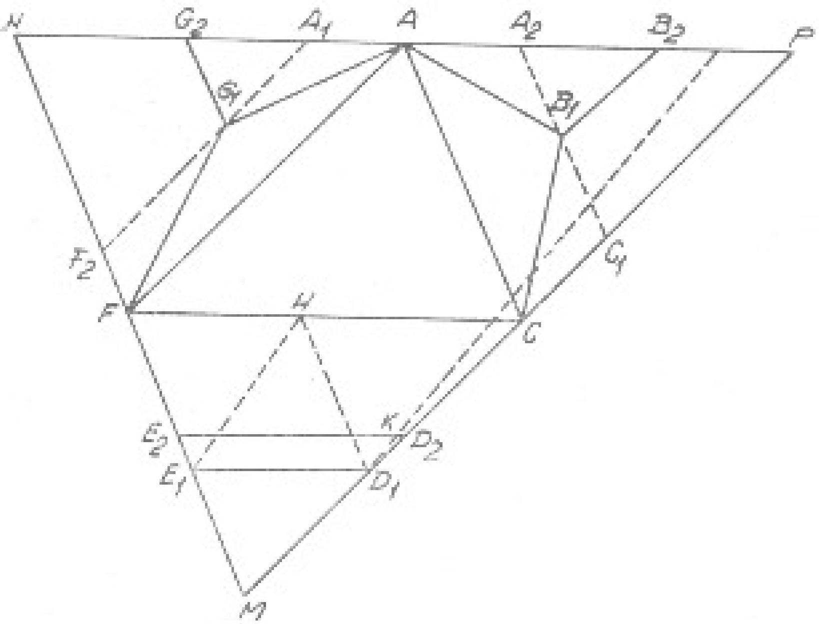
N
G2
A1
A
A2
B2
P
G1
B1
F2
C1
F
H
C
K
E2
D2
E1
D1
M

Fig. 5 c

minate de relațiile: $AU = (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)AP$, $AR = \frac{1}{13}(-10\alpha^2 + 6\alpha + 12)AP$. Dacă D este în interiorul triunghiului A_2VU avem:

$$(DAG) \leqslant (UAF_2) < (A_2AF) = (\alpha - \alpha^2)(ACF),$$

deci $\sigma(N) < \sigma(M)$. Dacă D este în interiorul triunghiului SPR avem:

$$(DEG) \geqslant (SM'N') > (PAC) = (ACF),$$

ceeace este contrar ipotezei că (ACF) este maximă.

c. Construim ca la punctul 1 punctele B_1, D_1, E_1, G_1, astfel ca $\{A, B_1, C, D_1, E_1, F, G_1\} = M$ (fig. 5c cu notațiile de la fig. 5). Punctele B_1, G_1 sînt situate respectiv pe A_2C_1, A_1F_2. Să ducem dreapta D_2E_2, paralelă cu D_1E_1, simetrica ei față de linia mijlocie corespunzătoare a triunghiului CMF. Punctele D, E trebuie să aparțină trapezului $D_1D_2E_2E_1$, altfel unul din triunghiurile CDE, DEF are aria mai mică decît $(\alpha - \alpha^2)(ACF)$ și $\sigma(N) < \sigma(M)$. Ducem prin D_1 dreptele D_1H paralelă cu MF și D_1K paralelă cu E_1H. Punctul D trebuie să aparțină triunghiului D_1KD_2. Ducem B_1B_2 paralelă cu CF; punctul B aparține triunghiului $A_2B_1B_2$, altfel $(BCD) < (B_1CD_1) = (\alpha - \alpha^2)(ACF)$ și $\sigma(N) < \sigma(M)$. Analog, G trebuie să aparțină triunghiului AG_1G_2. Dar, în acest caz, $(GAB) \leqslant (B_1AG_1)$, egalitatea avînd loc numai dacă B, G coincid respectiv cu B_1, G_1. Dacă B, G coincid cu B_1, G_1, atunci D, E trebuie să coincidă respectiv cu D_1, E_1, altfel sau $(BCD) < (B_1CD_1)$, sau $(EFG) < (E_1FG_1)$.

Rezultă că $\sigma(N) \leqslant \sigma(M)$, egalitatea avînd loc numai dacă N coincide cu M.

În concluzie, $\sigma_7 = \alpha - \alpha^2 \approx 0{,}24698$.

Observație. Heptagonul APCDEFG este inscriptibil într-o elipsă.

Teorema 9. $\sigma_7 > \sigma_8 \geqslant \frac{-1 + 6\alpha - 2\alpha^2}{7} \approx 0{,}18202$.

Demonstrație. Ducînd medianele DD' și AA' respectiv în triunghiurile ADG și DAE (fig. 4), acestea vor fi concurente într-un punct O, centrul elipsei circumscrise heptagonului ABCDEFG. Se arată ușor că:

$$(AOD) = (AOE) = (BOE) = (BOF) = (COF) = (COG) = (DOG) =$$
$$= \frac{-1 + 6\alpha - 2\alpha^2}{7}(ACF),$$

și că acestea sînt triunghiurile de arie minimă din mulțimea

$$M' = M \cup \{O\} = \{A, B, C, D, E, F, G, O\} \in 8.\ \text{Atunci:}$$

$$\sigma_8 \geqslant \sigma(M') = \frac{(AOD)}{(ACF)} = \frac{-1 + 6\alpha - 2\alpha^2}{7} \approx 0{,}18202.$$

Am văzut (teorema 8) că mulțimea M (și mulțimile afin congruente) este singura pentru care $\sigma(M) = \sigma_7$. Este evident că oricum am adăuga un punct H la mulțimea M, vom obține o mulțime $M_1 = M \cup \{H\}$ pentru care $\sigma(M_1) < \sigma(M)$. Deci $\sigma_8 < \sigma_7$.

Résumé

Étant donné un ensemble M des points du même plan on note avec $\sigma(M)$ le raport des aires plus petite et plus grande ayant les sommets parmi les points du enemble M. De même, on note σ_α le plus grande $\sigma(M)$, pour tous les ensembles contenant α points.

En suite est donnée la méthode de calcul pour σ_3, σ_4, σ_5 σ_6, σ_7 et des limites pour σ_8.