EXTINDEREA NOȚIUNII DE INTERVAL PE MULȚIMI

de

AUREL IOANOVICIU

1. GENERALITĂȚI

Fie T o mulțime arbitrară și $\mathbf{P}(T)$ mulțimea părților lui T. Vom nota cu A, B, C, ... elementele lui $\mathbf{P}(T)$.

Definiția 1. Numim *interval* o pereche ordonată de mulțimi, $A_1 \in \mathbf{P}(T)$, $A_2 \in \mathbf{P}(T)$, cu condiția $A_1 \subseteq A_2$. Vom nota intervalul $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$. Mulțimile A_1, A_2 le numim *extremitățile* intervalului $\mathbf{A}$.

Definiția 2. O mulțime M *aparține* intervalului $\mathbf{A}$, $M \in \mathbf{A}$, dacă $A_1 \subseteq M \subseteq A_2$. Evident că $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$.

2. RELAȚII ÎNTRE INTERVALE

Definiția 3. Două intervale $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ sînt *egale*, dacă oricare ar fi $A \in \mathbf{A}$, implică $A \in \mathbf{B}$ și reciproc. Vom nota $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca două intervale* $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ *și* $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$ *să fie egale este ca* $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$.

Demonstrație. 1. Condiția este necesară. Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, atunci orice mulțime $A \in \mathbf{A}$, în particular și A_1, A_2, aparțin intervalului $\mathbf{B}$, $A_1 \in \mathbf{B}$, $A_2 \in \mathbf{B}$, deci $B_1 \subseteq A_1 \subseteq B_2$, $B_1 \subseteq A_2 \subseteq B_2$; reciproc, orice mulțime $B \in \mathbf{B}$, în particular și B_1, B_2, trebuie să aparțină intervalului $\mathbf{A}$, $B_1 \in \mathbf{A}$, $B_2 \in \mathbf{A}$, deci $A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2$, $A_1 \subseteq B_2 \subseteq A_2$. Aceste relații și precedentele ne dau $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$.

2. Condiția este suficientă. Dacă $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, atunci pentru oricare mulțime $A \in \mathbf{A}$ vom avea $B_1 = A_1 \subseteq A \subseteq A_2 = B_2$, deci $A \in \mathbf{B}$; reciproc pentru orice $B \in \mathbf{B}$ vom avea $A_1 = B_1 \subseteq B \subseteq B_2 = A_2$, deci $B \in \mathbf{A}$. Rezultă $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Definiția 4. Spunem că intervalul $\mathbf{A}$ este *inclus* în $\mathbf{B}$ dacă există două mulțimi $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ astfel încît pentru orice mulțime $B' \in \mathbf{B}$ și orice $A' \in \mathbf{A}$ să avem $A \subseteq B'$, $B \supseteq A'$. Vom nota $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Relația $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ este echivalentă cu $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$.

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *este ca* $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2$.

Demonstrație. 1. Condiția este necesară. Dacă $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, atunci există o mulțime $A \in \mathbf{A}$, $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, astfel încît pentru oricare mulțime $B' \in \mathbf{B}$ să avem $A \subseteq B'$. În particular, pentru $B' = B_1$ vom avea $A \subseteq B_1$ și întrucît $A_1 \subseteq A$, rezultă $A_1 \subseteq B_1$. Analog se arată că $A_2 \subseteq B_2$.

2. Condiția este suficientă. Dacă $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2$, atunci, pentru orice $A' \in \mathbf{A}$ și $B' \in \mathbf{B}$, luînd $A = A_1 \in \mathbf{A}$, $B = B_2 \in \mathbf{B}$ vom avea $A = A_1 \subseteq B_1 \subseteq B'$, $B = B_2 \supseteq A_2 \supseteq A'$, deci $A \subseteq B'$, $B \supseteq A'$, adică $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

Observație. Dacă $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ vom spune că $\mathbf{A}$ este inclusă strict în $\mathbf{B}$ și vom nota $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Definiția 5. Intervalul $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ este *mai mic* decît intervalul $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$, $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, dacă pentru oricare două mulțimi $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ avem $A \subseteq B$. Dacă $A \subset B$ vom spune că intervalul $\mathbf{A}$ este strict mai mic decît intervalul $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} < \mathbf{B}$. Relația $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, $(\mathbf{A} < \mathbf{B})$, este echivalentă cu $\mathbf{B} \geqslant \mathbf{A}$, $(\mathbf{B} > \mathbf{A})$.

Teorema 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, $(\mathbf{A} < \mathbf{B})$, *este ca* $A_2 \subseteq B_1$, $(A_2 \subset B_1)$.

Demonstrație. 1. Condiția este necesară. Deoarece $A_2 \in \mathbf{A}$ și $B_1 \in \mathbf{B}$ din $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, $(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ rezultă că $A_2 \subseteq B_1$, $(A_2 \subset B_1)$.

2. Condiția este suficientă. Pentru oricare $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$ avem $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ și din condiția $A_2 \subseteq B_1$, $(A_2 \subset B_1)$ rezultă $A \subseteq B$, $(A \subset B)$.

Definiția 6. Spunem că intervalul $\mathbf{A}$ este *predecesorul* intervalului $\mathbf{B}$ — $\mathbf{A}$ *precede* pe $\mathbf{B}$ — dacă orice mulțime $M \in \mathbf{A}$ aparține și intervalului $\mathbf{B}$, $M \in \mathbf{B}$. Vom nota $\mathbf{A} \leqslant\!\!\!\leqslant \mathbf{B}$. Relația $\mathbf{A} \leqslant\!\!\!\leqslant \mathbf{B}$ este echivalentă cu $\mathbf{B} \geqslant\!\!\!\geqslant \mathbf{A}$.

Teorema 4. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un interval* $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ *să preceadă intervalul* $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$ *este ca extremitățile intervalului* $\mathbf{A}$ *să aparțină intervalului* $\mathbf{B}$: $A_1, A_2 \in \mathbf{B}$.

Demonstrație. 1. Condiția este necesară. Întrucît $A_1 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_2$ rezultă că $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$. Conform definiției relației „precede" între două intervale, rezultă că $A_1, A_2 \in \mathbf{B}$.

2. Condiția este suficientă. Dacă $A_1, A_2 \in \mathbf{B}$, atunci $B_1 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq B_2$. Oricare ar fi $M \in \mathbf{A}$, avem $A_1 \subseteq M \subseteq A_2$, de unde $B_1 \subseteq M \subseteq B_2$, deci $M \in \mathbf{B}$, ceeace înseamnă că $\mathbf{A} \leqslant\!\!\!\leqslant \mathbf{B}$.

Observație. Dacă $A_1 \neq B_1$, $A_2 \neq B_2$ spunem că intervalul $\mathbf{A}$ precede strict pe $\mathbf{B}$ și notăm $\mathbf{A} \ll \mathbf{B}$.

Sînt evidente următoarele proprietăți ale relației de incluziune și ale relațiilor „mai mic" și „precede":

a. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ implică $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;

b. $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{A}$ implică $\mathbf{A} = \mathbf{B} = [A_1, A_1]$;

c. $\mathbf{A} \underline{\ll} \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \underline{\ll} \mathbf{A}$ implică $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
d. Relațiile $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ se exclud reciproc;
e. Relațiile $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ se exclud reciproc;
f. Relațiile $\mathbf{A} \ll \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \gg \mathbf{B}$ se exclud reciproc;
g. Relația de incluziune și relația „precede” sînt reflexive:

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \gg \mathbf{A}$;

h. Toate relațiile sînt tranzitive:

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} < \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} < \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} < \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \underline{\ll} \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \underline{\ll} \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \ll \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \overline{\ll} \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \overline{\ll} \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \ll \mathbf{C}$,

i. Relațiile stricte sînt tranzitive asupra celorlalte:

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ sau $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} < \mathbf{C}$ sau $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} < \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \underline{\ll} \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \ll \mathbf{C}$ sau $\mathbf{A} \ll \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \underline{\ll} \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \ll \mathbf{C}$;

j. Există implicațiile:

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{C}$,
$\mathbf{A} \underline{\ll} \mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{C}$ implică $\mathbf{A}_1 \leqslant \mathbf{C}$.

3. OPERAȚII CU INTERVALE

Teorema 5. *Fiind date intervalele* $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$, $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$, *există un interval* $\mathbf{C}$ *cu proprietățile:*

1. *Oricare ar fi* $A \in \mathbf{A}$ *și* $B \in \mathbf{B}$, *reuniunea lor* $C = A \cup B$ *aparține intervalului* $\mathbf{C}$, $C \in \mathbf{C}$.

2. *Oricare ar fi* $C \in \mathbf{C}$, *există două mulțimi* $A \in \mathbf{A}$ *și* $B \in \mathbf{B}$ *astfel ca* $A \cup B = C$.

Demonstrație. 1. Dacă $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$, atunci $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$, deci $A_1 \cup B_1 \subseteq A \cup B \subseteq A_2 \cup B_2$. Să notăm cu $\mathbf{C}$ intervalul cu extremitățile $C_1 = A_1 \cup B_1$, $C_2 = A_2 \cup B_2$; rezultă că $C = A \cup B \in \mathbf{C}$.

2. Să arătăm acum că pentru orice mulțime $C' \in \mathbf{C} = [C_1, C_2]$ unde $C_1 = A_1 \cup B_1$ și $C_2 = A_2 \cup B_2$, există două mulțimi $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$ astfel încît $A \cup B = C$. Să notăm $A = A_2 \cap C$ și $B = B_2 \cap C$. Atunci $A \subseteq A_2$ și $B \subseteq B_2$; pe de altă parte, întrucît $C \in \mathbf{C}$, deci $A_1 \cup B_1 = C_1 \subseteq C \subseteq A_2 \cup B_2$, avem $A_1 \subseteq C$, $B_1 \subseteq C$. Rezultă $A_1 \subseteq C \cap A_2$, $B_1 \subseteq C \cap B_2$, deci $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ ceeace înseamnă că $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Avem de asemenea $A \cup B = (A_2 \cap C) \cup (B_2 \cap C) = (A_2 \cup B_2) \cap C = C$.

Definiția 7. Intervalul $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$, unde $C_1 = A_1 \cup B_1$, $C_2 = A_2 \cup B_2$ îl numim *suma* intervalelor $\mathbf{A} = [A_1, A_2$ și $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$. Vom nota $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ sau $[A_1, A_2] + [B_1, B_2] = [C_1, C_2] = [A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2]$.

Proprietățile sumei.

1. Suma a două intervale este comutativă: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. Suma a trei sau mai multe intervale este asociativă:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

3. Dacă $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ sau dacă $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, atunci $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B}$
4. Dacă $\mathbf{A} \ll \mathbf{B}$ atunci $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [A_1, B_2]$.

Teorema 6. *Fiind date intervalele* $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ *și* $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$, *există un interval* $\mathbf{C}$ *cu proprietățile:*

1. *Oricare ar fi* $A \in \mathbf{A}$ *și* $B \in \mathbf{B}$, *diferența lor* $C = A - B$ *aparține intervalului* $\mathbf{C}$, $C \in \mathbf{C}$.

2. *Oricare ar fi* $C \in \mathbf{C}$, *există două mulțimi* $A \in \mathbf{A}$ *și* $B \in \mathbf{B}$, *astfel încît* $A - B = C$.

Demonstrație. 1. $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$ implică $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ și $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ de unde $A_1 - B_2 \subseteq A - B \subseteq A_2 - B_1$. Fie $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$, unde $C_1 = A_1 - B_2$, $C_2 = A_2 - B_1$, atunci $A - B = C \in \mathbf{C}$.

2. Fie $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$ intervalul cu extremitățile $C_1 = A_1 - B_2$ și $C_2 = A_2 - B_1$ și să considerăm o mulțime oarecare $C \in \mathbf{C}$. Fie $A = C \cup A_1$ și $B = B_2 - C$. Avem succesiv:

$A = C \cup A_1$ implică $C \subseteq A$ și $A_1 \subseteq A$,
$C \in \mathbf{C}$ implică $A_1 - B_2 = C_1 \subseteq C \subseteq C_2 = A_2 - B_1$,
$C \subseteq A_2 - B_1$ implică $C \subseteq A_2$ și $C \cap B_1 = \varnothing$
$C \subseteq A_2$ și $A_1 \subseteq A_2$ implică $C \cup A_1 = A \subseteq A_2$,
$A_1 \subseteq A$ și $A \subseteq A_2$ implică $A \in \mathbf{A}$,
$B = B_2 - C$ implică $B \subseteq B_2$ și $B \cap B_1 = (B_2 \cap B_1) - (C \cap B_1) = B_2 \cap B_1 = B_1$,
$B \cap B_1 = B_1$ implică $B_1 \subseteq B$,
$B_1 \subseteq B$ și $B \subseteq B_2$ implică $B \in \mathbf{B}$.
În sfîrșit:
$A - B = (C \cup A_1) - (B_2 - C) = (C \cup A_1) \cap \complement(B_2 \cap \complement C) = (C \cup A_1) \cap (\complement B_2 \cup C) = C \cup (A_1 \cap \complement B_2) = C \cup (A_1 - B_2)$.
Întrucît $A_1 - B_2 = C_1 \subseteq C$ avem $C \cup (A_1 - B_2) = C$, deci:

$$A - B = C.$$

Definiția 8. Intervalul $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$, unde $C_1 = A_1 - B_2$, $C_2 = A_2 - B_1$, îl numim *diferența* intervalelor $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ și $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$. Vom nota $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, sau $[A_1, A_2] - [B_1, B_2] = [C_1, C_2] = [A_1 - B_2, A_2 - B_1]$.

Proprietățile scăderii:

1. Scăderea nu este nici comutativă, nici asociativă.
2. Există relația:

$$\mathbf{A} - (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{C}$$

3. Dacă $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, atunci $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [\varnothing, \varnothing]$.

Teorema 7. *Fiind date intervalele* $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$, $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$ *există un interval* $\mathbf{C}$ *cu proprietățile:*

1. *Oricare ar fi* $A \in \mathbf{A}$ *și* $B \in \mathbf{B}$, *intersecția lor* $C = A \cap B$ *aparține intervalului* $\mathbf{C}$, $C \in \mathbf{C}$.

2. *Oricare ar fi $C \in \mathbf{C}$, există două mulțimi $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$, astfel încît $A \cap B = C$.*

Demonstrație. 1. $A \in \mathbf{A}$ și $B \in \mathbf{B}$ implică $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ de unde $A_1 \cap B_1 \subseteq A \cap B \subseteq A_2 \cap B_2$. Fie $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$ unde $C_1 = A_1 \cap \cap B_1$, $C_2 = A_2 \cap B_2$, atunci $A \cap B = C \in \mathbf{C}$.

2. Fie C o mulțime oarecare aparținînd intervalului $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$ unde $C_1 = A_1 \cap B_1$, $C_2 = A_2 \cap B_2$. Să notăm $A = A_1 \cup C$ și $B = B_1 \cup C$. Întrucît $C \in \mathbf{C}$, avem $A_1 \cap B_1 \subseteq C \subseteq A_2 \cap B_2$, deci $C \subseteq A_2$, $C \subseteq B_2$. Atunci $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$, deci $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Pe de altă parte avem:

$$A \cap B = (A_1 \cup C) \cap (B_1 \cup C) = (A_1 \cap B_1) \cup C.$$

Dar $A_1 \cap B_1 \subseteq C$, deci $A \cap B = C$.

Definiția 9. Intervalul $\mathbf{C} = [C_1, C_2]$, unde $C_1 = A_1 \cap B_1$, $C_2 = A_2 \cap \cap B_2$, îl vom numi *produsul* intervalelor $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$, $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$. Vom nota $C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ sau $[A_1, A_2] \cdot [B_1, B_2] = [C_1, C_2] = [A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2]$.

Proprietățile înmulțirii.

1. Înmulțirea intervalelor este comutativă.
2. Înmulțirea intervalelor este asociativă.
3. Înmulțirea intervalelor este distributivă față de adunare.

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= [A_1, A_2] \cdot [B_1 \cup C_1, B_2 \cup C_2] = [A_1 \cap (B_1 \cup C_1), A_2 \cap (B_2 \cup C_2)] = \\ &= [(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap C_1), (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 \cap C_2)] = \\ &= [A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2] + [A_1 \cap C_1, A_2 \cap C_2] = \\ &= [A_1, A_2] \cdot [B_1, B_2] + [A_1, A_2] \cdot [C_1, C_2] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.\end{aligned}$$

Înmulțirea intervalelor nu este distributivă față de scădere:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

Teorema 8. *Fiind dat intervalul $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$, există un interval* **B** *cu proprietățile:*

1. *Oricare ar fi $A \in \mathbf{A}$, complementara ei $\complement A = B$ aparține intervalului* **B**, $B \in \mathbf{B}$.

Demonstrație. 1. $A \in \mathbf{A}$ implică $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$. Atunci $\complement A_2 \subseteq \complement A \subseteq \complement A_1$. Fie $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$ intervalul cu extremitățile $B_1 = \complement A_2$, $B_2 = \complement A_1$. Atunci $B = \complement A \in \mathbf{B}$.

2. Fie B o mulțime oarecare aparținînd intervalului $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$, unde $B_1 = \complement A_2$, $B_2 = \complement A_1$ și $A = \complement B$. Atunci, întrucît $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$, vom avea $\complement B_2 \subseteq \complement B \subseteq \complement B_1$, adică $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, deci $A \in \mathbf{A}$ și $\complement A = \complement(\complement B) = B$.

Definiția 10. Intervalul $\mathbf{B} = [B_1, B_2]$, unde $B_1 = \complement A_2$ și $B_2 = \complement A_1$, îl vom numi *intervalul complementar* al intervalului $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ sau *co-intervalul* lui **A**. Vom nota $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}}$ sau $\overline{[A_1, A_2]} = [\complement A_2, \complement A_1]$.

Proprietățile co-intervalelor.

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ implică $\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{B}}$.

2. Intervalul complementar al co-intervalului lui $\mathbf{A}$ este $\mathbf{A}$:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}.$$

3. Co-intervalul sumei a două intervale este egal cu produsul co-intervalelor respective: $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$.

Demonstrație.

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = [\overline{A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2}] = [\mathrm{C}(A_2 \cup B_2), \mathrm{C}(A_1 \cup B_1)] =$$
$$= [\mathrm{C}A_2 \cap \mathrm{C}B_2, \mathrm{C}A_1 \cap \mathrm{C}B_1] = [\mathrm{C}A_2, \mathrm{C}A_1] \cdot [\mathrm{C}B_2, \mathrm{C}B_1] =$$
$$= [\overline{A_1, A_2}] \cdot [\overline{B_1, B_2}] = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}.$$

4. Co-intervalul produsului a două intervale este egal cu suma co-intervalelor respective: $\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$.

Demonstrație. Știm de la proprietatea (3) că:

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}.$$

Notînd $\mathbf{C} = \overline{\mathbf{A}}$ și $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{B}}$, relația precedentă se scrie:

$$\overline{\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D};$$

și pe baza proprietății (1) obținem:

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{D}}}} = \overline{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}},$$

care, pe baza proprietății (2) ne dă:

$$\overline{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{D}}.$$

5. Co-intervalul diferenței a două intervale este egal cu suma dintre co-intervalul descăzutului și scăzător.

Demonstrație. Pe baza proprietăților (5), (1), (4) și (2) avem:

$$\overline{\mathbf{A} - \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{B}}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\overline{\mathbf{B}}} = \overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B}.$$

6. Diferența a două intervale este egală cu produsul dintre descăzut i co-interval ul scăzătorului.

Demonstrație:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [A_1, A_2] - [B_1, B_2] = [A_1 - B_2, A_2 - B_1] =$$
$$= [A_1 \cap \mathrm{C}B_2, A_2 \cap \mathrm{C}B_1] = [A_1, A_2] \cdot [\mathrm{C}B_2, \mathrm{C}B_1] = \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{B}}.$$

7. Dacă $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, atunci $\overline{\mathbf{B}} \subseteq \overline{\mathbf{A}}$.

8. Dacă $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, atunci $\overline{\mathbf{B}} \leqslant \overline{\mathbf{A}}$.

9. Dacă $\mathbf{A} \underline{\ll} \mathbf{B}$, atunci $\overline{\mathbf{B}} \underline{\ll} \overline{\mathbf{A}}$.

4. IZOMORFISMUL DINTRE **P**(T) ŞI **E**

Vom numi *interval echiextremal* sau *echiinterval*, un interval cu extremitățile egale, $\mathbf{A} = [A, A]$, și fie $\mathbf{V}$ mulțimea tuturor echiintervalelor.

Aplicația $\Phi : \mathbf{P}(T) \to \mathbf{V}$ prin relația $\Phi(A) = [A, A]$ este un *izomorfism*. Se verifică imediat că:

$$\Phi^{-1}([A, A]) = A,$$

$$A = B \Leftrightarrow \Phi(A) = \Phi(B),$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B),$$

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B),$$

$$\Phi(A - B) = \Phi(A) - \Phi(B),$$

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B).$$

Din acest punct de vedere, mulțimea tuturor intervalelor constituie o prelungire a lui **P**(T).

Résumé

Dans la note on introduit la notion d'intervalle sur l'ensemble des parties d'un ensemble, on établit des relations entre eux et leurs propriétés; puis, on définit les opérations avec les intervalles et les propriétés des opérations. En fin, on montre que le sous-ensemble des intervalles avec les extrêmes égaux est isomorphe avec l'ensemble des parties d'un ensemble.