GENERALIZAREA FORMULEI DE CUADRATURA A LUI STEFFENSEN

de

DUMITRU ACU

Scopul acestei lucrări este de a da o generalizare pentru formula de cuadratură a lui Steffensen [1], generalizare în sensul celor date pentru alte formule de cuadratură în lucrările [2], [3], [4], [5].

1. — Fie funcţia $f(x)$ de clasă C^6 pe intervalul $[0, 1]$; împărţim intervalul $[0, 1]$ în n părţi $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, unde $x^{(0)} = 0$, $x^{(n)} = 1$ şi fiecare parte $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are o lungime a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Fiecărei părţi $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, îi aplicăm formula de cuadratură a lui Steffensen:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{a_i}{20}\Big[&11f\left(x^{(i-1)} + \frac{a_i}{6}\right) - 14f\left(x^{(i-1)} + \frac{2a_i}{6}\right) + \\ &+ 26f\left(x^{(i-1)} + \frac{3a_i}{6}\right) - 14f\left(x^{(i-1)} + \frac{4a_i}{6}\right) + 11f\left(x^{(i-1)} + \frac{5a_i}{6}\right)\Big]\end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Obţinem astfel n formule care însumate ne dau pentru calculul integralei funcţiei $f(x)$ pe $[0, 1]$ următoarea formulă de cuadratură:

$$(2)\qquad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{5n} A_i f(x_i) + R_{n,6}(f),$$

unde

$$A_{5i-4} = \frac{11}{20} a_i,$$

$$A_{5i-3} = -\frac{14}{20} a_i,$$

$$A_{5i-2} = \frac{26}{20} a_i, \tag{3}$$

$$A_{5i-1} = -\frac{14}{20} a_i,$$

$$A_{5i} = \frac{11}{20} a_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sînt coeficienții, iar

$$x_{5i-4} = x^{(i-1)} + \frac{a_i}{6} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + \frac{a_i}{6},$$

$$x_{5i-3} = x^{(i-1)} + \frac{2a_i}{6} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + \frac{2a_i}{6},$$

$$x_{5i-2} = x^{(i-1)} + \frac{3a_i}{6} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + \frac{3a_i}{6}, \tag{4}$$

$$x_{5i-1} = x^{(i-1)} + \frac{4a_i}{6} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + \frac{4a_i}{6},$$

$$x_{5i} = x^{(i-1)} + \frac{5a_i}{6} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + \frac{5a_i}{6}, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sînt nodurile. $R_{n,6}(f)$ este restul formulei (2).

Teorema I. Formula de cuadratură (2) are gradul de exactitate egal cu cinci.

Demonstrație. Înlocuind în (2) pe $f(x)$ cu $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$ și efectuînd calculele, obținem

$$R_{n,6}(1) = R_{n,6}(x) = R_{n,6}(x^2) = R_{n,6}(x^3) = R_{n,6}(x^4) = R_{n,6}(x^5) = 0,$$

$$R_{n,6}(x^6) = \frac{41}{7 \cdot 6^5} \sum_{i=1}^{n} a_i^7 \neq 0, \text{ c.c.t.d.} \tag{5}$$

Teorema II. Dacă funcția $f(x)$ este de clasă C^6 pe intervalul $[0, 1]$ atunci

$$R_{n,6}(f) = \frac{1}{7!} \frac{41}{6^5} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^7 \right) f^{(VI)}(\xi), \tag{6}$$

unde $\xi \in [0, 1]$.

Demonstrație. Din [6] rezultă că

$$R_{n,6}(f) = \int_0^1 F_6(t) f^{(VI)}(t) \, dt, \tag{7}$$

unde

$$F_6(t) = \frac{1}{5!} \left\{ \frac{(1-t)^6}{6} - \sum_{i=1}^{5n} A_i K_5(x_i - t) \right\} \tag{8}$$

iar

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & \text{dacă } u \geqq 0 \\ 0, & \text{dacă } u < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Fie $t \in [x^{(k-1)}, x^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Din (8), ținînd seama de (9), prin calcul direct deducem:

$$F_6(x^{(k-1)}) = F_6'(x^{(k-1)}) = F_6''(x^{(k-1)}) = F_6(x^{(k)}) = F_6'x^{(k)}) = F_6''(x^{(k)}) = 0, \tag{10}$$

$$F_6(x_{5k-4}) = F_6(x_{5k}) = \frac{1}{6!6^6} a_k^6 > 0, \tag{11}$$

$$F_6(x_{5k-3}) = F_6(x_{5k-1}) = \frac{121}{6!6^6 \cdot 5} a_k^6 > 0, \tag{12}$$

$$F_6(x_{5k-2}) = \frac{9 \cdot 67}{6!6^6 5} a_k^6 > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Din (10), (11), (12), (13) rezultă că $F_6(t)$ nu se poate anula în intervalul $(x^{(k-1)}, x^{(k)})$. Într-adevăr, să presupunem că $F_6(t)$ s-ar anula în η, unde $\eta \in (x^{(k-1)}, x^{(k)})$. Aplicînd teorema lui Rolle funcției $F_6(t)$ pe intervalul $(x^{(k-1)}, x^{(k)})$, precum și derivatelor ei succesive, rezultă că $F_6^{(VI)}(t)$ se anulează într-un punct din intervalul $(x^{(k-1)}, x^{(k)})$. Dar acest fapt contrazice $F_6^{(VI)}(t) = 1$ pe întreg intervalul $[0, 1]$.

Deci $F_6(t) \geqq 0$ pe intervalul $[x^{(k-1)}, x^{(k)}]$. Cum aceasta are loc oricare ar fi intervalul $[x^{(k-1)}, x^{(k)}] = (k = 1, 2, \ldots, n)$ rezultă că funcția $F_6(t)$ păstrează același semn pe întreg intervalul $[0, 1]$ și anume, este nenegativă.

Aplicînd în (7) teorema de medie, rezultă:

$$R_{n,6}(f) = f^{(VI)}(\xi) \int_0^1 F_6(t) \mathrm{d}t \tag{14}$$

unde $\xi \in [0, 1]$.

Pentru calculul integralei din (14) procedăm în modul următor:

$$\int_0^1 F_6(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5!}\left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^6}{6}\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{5n} A_i \int_0^1 K_6(x_i - t)\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{5!}\left\{\frac{1}{6 \cdot 7} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{5n} A_i \int_0^{x_i} (x_i - t)^5 \mathrm{d}t \right\} = \frac{1}{5!}\left\{\frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5n} A_i (x_i)^6\right\} = \frac{1}{6!} R_{n,6}(x^6) = \frac{1}{7!}\frac{41}{6^6}\sum_{i=1}^{n} a_i^7,$$

rezultat care înlocuit în (14) ne dă (6).

BIBLIOGRAFIE

1. Ștef f e n s e n J. F., *Iterpolation*. New-York, 1950.
2. S e y m o u r H a b e r, *Midpoind Quadrature Formulas*. „Math. Comput.", 21, nr. 100, p. 719–721, 1967.
3. G h. C o m a n, *O generalizare a formulei de cuadratură a trapezelor și a formulei lui Simpson*, Studia Universitas „Babeș-Bolyai". Series Math.-Phys., Fasciculus 2, pp. 51–58, 1969.
4. D. A c u, *O generalizare a formulei de cuadratură a lui Newton*, St. Cerc. Mat., nr. 7, 1971.
5. D. A c u, *O formulă compusă de cuadratură* St. Cerc. Mat. (trimisă pentru publicare).
6. S. M. N i k o l'sk i j, *Kvadraturnyje formuly*, Moskva, 1958.

LA GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE LA STEFFENSEN

(R é s u m é)

L'auteur étudie la formule de quadrature (2) ou les coefficients sont donnés par les expressions (3) et les noeuds par (4), qui généralise la formule de Steffensen [1].

On démontre que la formule (2) a la degré l'exactitude égal a 5 et que, si la fonction f(x) a sur le segment [0,1] une dérivée d'ordresix continue, sont reste est donné par l'expression (6).

ASUPRA REDUCERII OBSERVAŢIILOR FOTOELECTRICE LA SISTEMUL FOTOMETRIC UBV.*

de

VASILE URECHE

1. *Introducere.* În cursul specializării pe care am efectuat-o, în iarna 1965—1966, în Uniunea Sovietică, am avut posibilitatea să fac cîteva sute de observaţii fotoelectrice cu fotometrul fotoelectric AFM—6 al Staţiei din Crimeea a Institutului Astronomic „Sternberg"de pe lingă Universitatea „Lomonosov" din Moscova.

Observaţiile au fost efectuate cu un fotomultiplicator EMI, utilizînd filtrele:

Ultraviolet: UFS—3

Albastru: SS—5

Galben: JS—17,

realizîndu-se astfel un sistem fotometric apropiat de sistemul UBV, aşa cum indică Sarov [3]. Deoarece aparatura utilizată de noi diferă de cea utilizată la introducerea de către Johnson a sistemului fotometric UBV, [2] apare necesitatea reducerii observaţiilor din sistemul propriu $u_0b_0v_0$ (corectate de efectul extincţiei) la sistemul fotometric standard UBV.

Lucrarea de faţă este consacrată deducerii relaţiilor de trecere corespunzătoare. În acest scop am efectuat, împreună cu G.V. Zaitseva şi C.S. Tsarevsky, observaţii fotoelectrice cu fotometrul indicat mai sus ataşat la un telescop de tip Cassegrain de 48 cm. diametru. Observaţiile au fost efectuate în Pleiade, în noaptea de 25/26 ianuarie 1966. Am observat 14 stele cu magnitudini UBV determinate de Johnson [2].

2. *Ecuaţiile de bază.* După corectarea observaţiilor de efectul extincţiei, atmosferice, prin metodica indicată de Hardie [1], mi-am propus să

---

* Comunicare prezentată la a IV-a Sesiune ştiinţifică a Observatorului Astronomic din Bucureşti, 19—21 octombrie 1968.

le reduc la sistemul UBV cu ajutorul formulelor corespunzătoare, date de Hardie în lucrarea citată, şi anume:

$$\left.\begin{aligned} V &= v_0 + \in(B - V) + \zeta_v \\ B - V &= \mu(b - v)_0 + \zeta_{bv} \\ U - B &= \Psi(u - b)_0 + \zeta_{ub} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

În aceste formule notaţiile sînt cele din lucrarea indicată. Practic însă, formulele (1) s-au arătat nepotrivite pentru efectuarea reducerii. Astfel reprezentarea grafică a diferenţei V — v_0 faţă de v_0 ne indică o relaţie liniară între aceste mărimi, ceeace arată existenţa unei însemnate diferenţe de scară între magnitudinile V şi v_0 (fig. 1). Asta sugerează utilizarea pentru reducere a unei relaţii de forma

$$V - v_0 = \beta_v v_0 + \varepsilon_v(B - V) + \zeta_v$$

Prezenţa unui termen de forma $\beta_v v_0$ şi în cazul observaţiilor fotoelectrice a mai fost semnalată de diferiţi autori [3], [4]. Weaver [4] arată că sursa acestei diferenţe aparente în scala magnitudinilor în cazul observaţiilor fotoelectrice nu este încă explicată.

În cele ce urmează mi-am propus să generalizez ecuaţiile de reducere ale lui Hardie, precum şi ecuaţiile ce rezultă din acestea, în cazul existenţei unei diferenţe de scală în scala magnitudinilor de forma arătată.

Considerînd două relaţii analoage, de forma de mai sus, pentru magnitudinile V şi B şi notînd

$$\frac{1 + \beta_b}{1 - (\varepsilon_b - \varepsilon_v)} = \mu, \qquad \frac{\beta_b - \beta_v}{1 - (\varepsilon_b - \varepsilon_v)} = \beta_{bv} \quad \text{şi} \quad \frac{\zeta_b - \zeta_v}{1 - (\varepsilon_b - \varepsilon_v)} = \zeta_{bv},$$

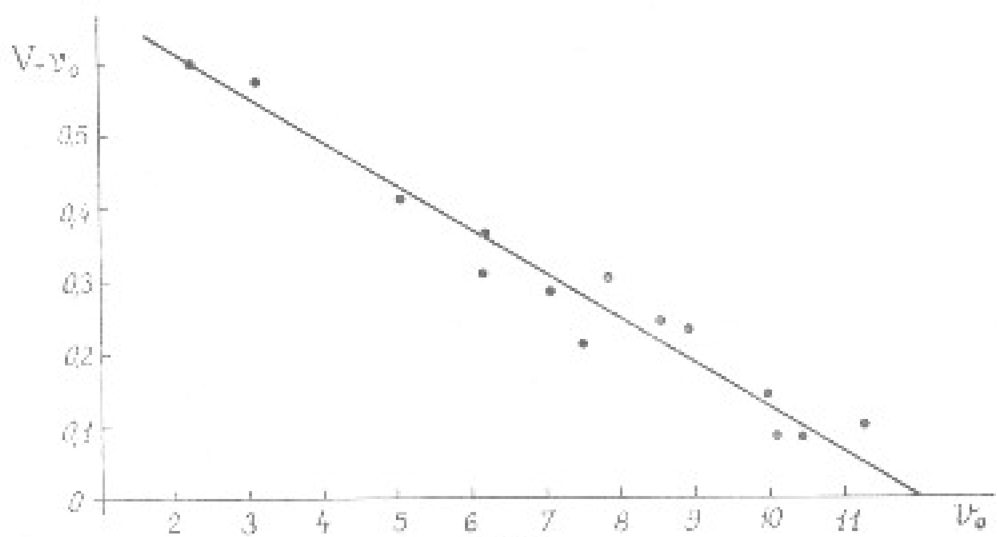

Fig. 9

apoi considerînd alte două relații pentru mangitudinile B și U și notînd rapoartele corespunzătoare respectiv cu Ψ, β_{ub}, ζ_{ub}, am obținut în locul formulelor (1) următoarele formule de reducere

$$\left.\begin{aligned} V - v_0 &= \beta_v v_0 + \varepsilon(B - V) + \zeta_v \\ B - V &= \mu(b - v)_0 + \beta_{bv} v_0 + \zeta_{bv} \\ U - B &= \Psi(u - b)_0 + \beta_{ub} b_0 + \zeta_{ub} \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Pe baza măsurătorilor efectuate la cele 14 stele din Pleiade am determinat prin metoda celor mai mici pătrate constantele β_v, ε, ζ_v, μ, β_{bv}, ζ_{bv}, Ψ β_{ub}, ζ_{ub}.
Astfel am obținut următoarele ecuații de reducere

$$V - v_0 = -0{,}057 v_0 - 0{,}034(B - V) + 0{,}718$$
$$\pm 3 \qquad \pm 11 \qquad \pm 18 \text{ e.p.}$$

$$B - V = 0{,}929(b - v_0) + 0{,}006 v_0 + 0{,}013$$
$$\pm 9 \qquad \pm 2 \qquad \pm 15 \text{ e.p.}$$

$$U - B = 0{,}878(u - b)_0 + 0{,}017 b_0 + 0{,}162$$
$$\pm 14 \qquad \pm 4 \qquad \pm 28 \text{ e.p.}$$

Aceste relații au dat o bună reprezentare a observațiilor în limita preciziei de măsurare.

Pe de altă parte, dacă de la valorile observate v, $b - v$, $u - b$ se trece direct la sistemul UBV, fără a mai trece prin sistemul natural v_0, $(b - v)_0$, $(u - b)_0$, atunci pentru această trecere Hardie dă formulele urmtăoare

$$\left.\begin{aligned} V &= v - k_v X + \varepsilon(B - V) + \zeta_v \\ B - V &= \mu(b - v) J_x - \mu k'_{bv} X + \zeta_{bv} \\ U - B &= \Psi(u - b) G_x - \Psi k'_{ub} X + \zeta_{ub} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

unde $J_x = 1 - k''_{bv} X$, $G_x = 1 - k''_{ub} X$; notațiile fiind cele din lucrarea lui Hardie [1].

Dacă reducerea la sistemul UBV se va face pe baza ecuațiilor (1'), atunci formulele (2) devin

$$\left.\begin{aligned} V &= (v - k_v X)(1 + \beta_v) + \varepsilon_v (B - V) + \zeta_v \\ B - V &= \mu(b - v) J_x - \mu k'_{bv} X + \beta_{bv} (v - k_v X) + \zeta_{bv} \\ U - B &= \Psi(u - b) G_x - \Psi k'_{ub} X + \beta_{ub} (b - k_b X) + \zeta_{ub} \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

unde $k_b = k_v + k'_{bv}$.

În deducerea ultimei ecuații din (2') s-a neglijat termenul $-\beta_{ub}(b - v) k''_{bv} X$, conținînd produsul a două cantități mici: β_{ub} și k''_{bv}.

3. *Măsurări diferențiale.* În observarea stelelor variabile, alegînd o stea de comparație apropiată de steaua variabilă (încît masele lor de aer să coincidă practic), este utilă aplicarea unor metode diferențiale de reducere. În cazul cînd prin reducere se urmărește determinarea unei magnitudini

(V) şi a doi indici de culoare (B — V, U — B), formulele diferenţiale indicate de Hardie (dacă reducerea se face direct, fără a mai trece prin sistemul natural) sînt

$$\left.\begin{aligned} \Delta V &= \Delta v - k_v \Delta X + \varepsilon \Delta (B - V) \\ \Delta (U - B) &= \Psi \Delta (u - b) - \Psi k'_{ub} \Delta X - \Psi k''_{ub} \bar{X} \Delta (u - b) \\ \Delta (B - V) &= \mu \Delta (b - v) - \mu k'_{bv} \Delta X - \mu k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

cu Δ notîndu-se diferenţele mărimilor corespunzătoare, $\bar{X}$ fiind masa medie de aer. Utilizînd în reducere ecuaţiile (1′), ecuaţiile (3) devin

$$\left.\begin{aligned} \Delta V &= (1 + \beta_v) \Delta v - k_v \Delta X + \varepsilon_v \Delta (B - V) \\ \Delta (B - V) &= \mu \Delta (b - v) - \mu k'_{bv} \Delta X - \mu k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) + \beta_{bv} \Delta v \\ \Delta (U - B) &= \Psi \Delta (u - b) - \Psi k'_{ub} \Delta X - \Psi k''_{ub} X \Delta (u - b) + \beta_{ub} \Delta b \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

În deducerea relaţiilor (3′) s-au neglijat termenii care conţin produse ale mărimilor : ΔX, k''_{bv}, k''_{ub}, β_v, β_{bv}, β_{ub}.

Pentru reducerea observaţiilor stelelor variabile este însă mai convenabil să se utilizeze diferenţele de magnitudini în toate culorile (în locul indicilor de culoare). Pentru acest caz Hardie dă următoarele formule

$$\left.\begin{aligned} \Delta V &= (1 - \varepsilon\mu) \Delta v + \varepsilon\mu \Delta b - k_v \Delta X - \varepsilon\mu k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) \\ \Delta B &= (\mu + \varepsilon\mu) \Delta b + (1 - \mu - \varepsilon\mu) \Delta v - (\mu + \varepsilon\mu) k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) - k_b \Delta X \\ \Delta U &= \Psi \Delta u + (\mu + \varepsilon\mu - \Psi) \Delta b + (1 - \mu - \varepsilon\mu) \Delta v - \\ &\quad - (\mu + \varepsilon\mu) k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) - \Psi k''_{ub} \bar{X} \Delta (u - b) - k_u \Delta X \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

unde $k_u = k_b + k'_{ub}$.

Utilizînd în reducere ecuaţiile (1′) şi neglijînd produsele de forma $\varepsilon \Delta x$, $(1 - \mu) \Delta X$, $(1 - \Psi) \Delta X$ şi $\varepsilon_v \beta_{bv}$, formulele (4) devin

$$\left.\begin{aligned} \Delta V &= (1 - \varepsilon_v \mu + \beta_v) \Delta v + \varepsilon_v \mu \Delta b - \varepsilon_v \mu k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) - k_v \Delta X \\ \Delta B &= (\mu + \varepsilon_v \mu) \Delta b + (1 - \mu - \varepsilon_v \mu + \beta_v + \beta_{bv}) \Delta v - \\ &\quad - (\mu + \varepsilon_v \mu) k''_{bv} X \Delta (b - v) - k_b \Delta X \\ \Delta U &= \Psi \Delta u + (\mu + \varepsilon_v \mu - \Psi + \beta_{ub}) \Delta b + (1 - \mu - \varepsilon_v \mu + \beta_v + \\ &\quad + \beta_{bv}) \Delta v - (\mu + \varepsilon_v \mu + \beta_{ub}) k''_{bv} \bar{X} \Delta (b - v) - \Psi k''_{ub} \bar{X} \Delta (u - b) - k_u \Delta X \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

În termenii principali ai formulelor (4′) intră mărimile efectiv observate, respectiv Δv, Δb şi Δu pentru prima, a doua şi a treia formulă. Deoarece, în general, observaţiile în cele trei culori nu se fac simultan (exceptînd cazul observaţiilor cu un fotometru cu trei canale) ; pentru calculul celorlalţi termeni din formulele (4′) se vor utiliza pentru Δv şi Δb valori interpolate ale acestor mărimi la fazele corespunzătoare, aşa cum indică Hardie. Acest lucru este valabil şi pentru ultimii termeni din formulele a doua şi a treia din sistemul (3′).

Luarea în considerare a termenilor care au ca şi coeficienţi pe β_v, β_{bv}, β_{ub} este importantă pentru asigurarea în calculele de reducere a unei precizii corespunzătoare observaţiilor fotoelectrice.

Folosesc acest prilej pentru a exprima calde mulţumiri prof. dr. B. V. Kukarkin şi dr. P. N. Kholopov pentru îndrumarea acordată în timpul specializării mele în Uniunea Sovietică.

De asemenea exprim mulţumiri colegilor sovietici G. V. Zaitseva şi G. S. Tsarevsky pentru ajutorul acordat în efectuarea observaţiilor.

BIBLIOGRAFIE

1. Hardie, R. H.,; *Photoelectric Reductions*, in „Astronomical Techniques", 178, 1962, ed. W. A. Hiltner.
2. Johnson, H. L.,; Morgan W. W.,; *Astrophysical J.* 117, No. 3, 313, 1953.
3. Sarov, A. S.; Bull. Abast. Astrofiz. Obs. 27, 133, 1962.
4. Weaver, H. F.; *Astrophysical J.* 116, No. 3, 612, 1952.

ON THE REDUCTION OF THE PHOTOELECTRIC OBSERVATIONS TO THE PHOTOMETRIC SYSTEM UBV.

Abstract

In tis paper, the formulae allowing to pass from the own photometric system $u_0b_0v_0$ to standard photometric system UBV are deducted; in the case when between the correspon-ding magnitude scales appear the scale differences.

Thus, for Hardie's [1] formulae (1), (2), (3),(4), the author gives the formulae(1'), (2'), (3'), (4').

The obtained formulae are useful for the reduction of the photoelectric observations of the stars.