IV. MATEMATICĂ

CONSTRUCȚIA METODELOR DE APROXIMARE A RĂDĂCINII UNEI ECUAȚII[1] (I)

de

A. GAIDICI

Considerăm ecuația algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$,

$$f: [a,b] \to R \wedge [a,b] \subset R.$$

Se știe că numai în anumite cazuri, pentru ecuația dată, se poate determina *soluția exactă* x^*. De cele mai multe ori ne mulțumim cu determinarea *soluției aproximative* $\bar{x}^*$, înțelegînd prin aceasta construirea unui șir convergent către $x^*(x_n \to x^*,\ n \to \infty)$. În acest caz, oricare termen al șirului respectiv poate fi luat drept $\bar{x}^*$, iar alegerea unui anumit $x_{n_0} = \bar{x}^*$, $(x_{n_0} \in \{x_n\})$, se face în funcție de precizia cu care se cere că ne apropiem de x^*. Mai exact,

$$|x^* - \bar{x}^*| < 10^{-m},\ (m \in N_1 \wedge x_{n_0} = \bar{x}^*),$$

unde prin N_i vom nota mulțimea $\{i, i+1,\ i+2, \dots\}$, $i \in N_0$, prin $\overline{N}^i$ o submulțime finită a lui N_i, iar prin simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\Rightarrow$ vom nota disjuncția (exclusivă), conjuncția și implicația logică.

Există mai multe *metode de iterație* cu ajutorul cărora se determină $\bar{x}^*$, cele mai des întîlnite fiind metoda coardei, a dreptelor tangente (Newton), a parabolelor tangente și a hiperbolelor tangente.

În cele ce urmează vom arăta că aceste metode au ca sursă comună de generare noțiunea de *contact a două curbe*, noțiune care ne va permite găsirea altor metode iterative[2].

Problema aproximării soluției x^* comportă două aspecte de principiu *global (A)* și *local, (B)*. Iată în ce constă fiecare din ele:
(A) știind că *există* $x^* \in (a, b)$ se cere:

1) construcția $\{x_n\} \in [a,b] \wedge (x_n \to x^*)$
2) calcularea soluției x^* cu o eroare dată (formulată mai sus).

(B) *dacă pentru* x_0 din domeniul de definiție a lui f *sînt satisfăcute anumite condiții*, atunci într-o sferă determinată

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x / |x - x_0| \leqslant r,\ x \in R\} \qquad \text{se cere:}$$

1) existența soluției $x^* \in \overline{S}$, $\qquad x^* = \lim x_n,\ \{x_n\} \in \overline{S}$
2) unicitatea soluției $x^* \in \overline{S}_1 \subseteq \overline{S}$.

---

[1]. Întreaga lucrare se referă la o soluție simplă și izolată, ceea ce nu vom mai menționa în continuare.

[2]. Atît aplicarea lor la ecuații mai generale, cît și aspectul global, vor constitui obiectul altei lucrări (II).

Pe lîngă aceste două aspecte mai avem și cel al *ordinului de convergență* a metodei utilizate, lucru asupra căruia nu vom insista aici.

0. Considerăm familia de drepte

$$x = a_n^{(1)} Y + a_n^{(0)}, \quad (n \in N_0) \tag{0.1}$$

și curba $y = f(x)$. Vom determina $a_n^{(p)}$, $(p = 0,1)$, prin condițiile:

$$(Y(x_n) = f(x_n) \wedge Y(b) = f(b)) \vee (Y(a) = f(a) \wedge Y(x_n) = f(x_n))$$

$$\left.\begin{matrix} x = a_n^{(1)} f(x) + a_n^{(0)} \\ b = a_n^{(1)} f(b) + a_n^{(0)} \end{matrix}\right|_{x=x_n} \vee \left.\begin{matrix} a = a_n^{(1)} f(a) + a_n^{(0)} \\ x = a_n^{(1)} f(x) + a_n^{(0)} \end{matrix}\right|_{x=x_n} \tag{0.2}$$

cu soluția

$$a_n^{(1)} = \frac{b - x_n}{f(b) - (x_n)} \vee \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \tag{0.3}$$

$$a_n^{(0)} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \vee x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - (a)} f(x_n)$$

Aproximația x_{n+1} se obține luînd în (0.1) $Y = 0$, care împreună cu ultima relație din (0.3) ne dă *metoda de bază* a coardei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \vee x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} f(x_n), \quad (x_0 = a \vee b) \tag{0.4}$$

1. Determinăm $a_n^{(p)}$, $(p = 0,1)$ din familia (0.1) prin condițiile:

$$Y_{(x_n)}^{(p)} = f_{(x_n)}^{(p)}, \quad (p = 0,1).$$

adică din sistemul

$$\left.\begin{matrix} x = a_n^{(1)} f(x) + a_n^{(0)} \\ 1 = a_n^{(1)} f'(x) \end{matrix}\right|_{x=x_n} \tag{1.2}$$

cu soluția

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{f'(x_n)} \tag{1.3}$$

$$a_n^{(0)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Aproximația x_{n+1} se obține luînd în (0.1) $Y = 0$, care împreună cu ultima relație din (1.3) ne dă *metoda de bază* a dreptelor tangente.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.4}$$

Observația 1°. Păstrînd în (1.4) aceeași valoare $f'(x_0)$ pentru întregul proces iterativ, vom obține *metoda modificată* a dreptelor tangente

$$x_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_0)}, \quad (x'_0 = x_0). \tag{1.4'}$$

Această metodă o putem obține dacă notăm

$$\varphi_1(x) \equiv x - a_0^{(1)} f(x), \quad (a_0^{(1)} \text{ din } (1.3))$$

şi atunci este suficient să considerăm ecuaţia

$$x' = \varphi_1(x')$$

cu proprietatea

$$x'_{n+1} = \varphi_1\ (x'_n).$$

Procedînd în acelaşi mod, vom obţine *metoda modificată* a coardei, luînd

$$\varphi_0(x) \equiv x - a_0^{(1)} f(x), \quad (a_0^{(1)} \text{ din } (0.3)),$$

cu proprietatea

$$x'_{n+1} = \varphi_0(x'),$$

adică

$$(0.4)' \qquad x'_{n+1} = x'_n - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x'_n), \quad (x'_0 = x_0)$$

2. În mod analog, pentru familia de parabole

$$(2.1) \qquad x = a_n^{(2)} Y^2 + a_n^{(1)} Y + a_n^{(0)}, \ (n \in N_0),$$

sau de hiperbole

$$(2.2) \qquad x = b_n^{(2)} x Y + b_n^{(1)} Y + b_n^{(0)}, \ (n \in N_0),$$

impunînd condiţiile:

$$Y^{(p)}_{(x_n)} = f^{(p)}_{(x_n)}, \ (p = 0,\ 1,\ 2),$$

obţinem sistemul

$$(2.3) \qquad \left.\begin{aligned} x &= a_n^{(2)} f^2(x) + a_n^{(1)} f(x) + a_n^{(0)} \\ 1 &= a_n^{(2)} (f^2(x))' + a_n^{(1)} f'(x) \\ 0 &= a_n^{(2)} (f^2(x))'' + a_n^{(1)} f''(x) \end{aligned}\right|_{x=x_n}$$

sau, respectiv, sistemul

$$(2.4) \qquad \left.\begin{aligned} x &= b_n^{(2)} (xf(x)) + b_n^{(1)} f(x) + b_n^{(0)} \\ 1 &= b_n^{(2)} (xf(x))' + b_n^{(1)} f'(x) \\ 0 &= b_n^{(2)} (xf(x))' + b_n^{(1)} f''(x) \end{aligned}\right|_{x=x_n}$$

cu soluţia (2.5) V (2.6)

$$a_n^{(2)} = -\frac{f''(x_n)}{2f'^3(x_n)}$$

$$(2.5) \qquad a_n^{(1)} = \frac{f'^2(x_n) + f''(x_n)f(x_n)}{f'^3(x_n)}$$

$$a_n^{(0)} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(2.6)
$$b_n^{(2)} = -\frac{f''(x_n)}{\delta_2(x)}$$

$$b_n^{(1)} = \frac{2f'(x_n) + f''(x_n)f(x_n)}{\delta_2(x_n)}$$

$$b_n^{(0)} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{\delta_2(x_n)}$$

unde

$$\delta_2(x_n) = 2f'^2(x_n) - f''(x_n)\, f(x_n)$$

Intersectînd (2.1) V (2.2) cu $Y = 0$ şi comparînd pe rînd cu ultima relaţie din (1.5) V (2.6)m obţinem *metoda de bază* a parabolelor tangente [1]

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\gamma_n f''(x_n)\,\gamma_n f(x_n)\right)\gamma_n f(x_n) \tag{2.7}$$

sau *metoda de bază* a hiperbolelor tangente [2]

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 - \frac{1}{2}\gamma_n f''(x_n)\gamma_n f(x_n)\right)^{-1}\gamma_n f(x_n) \tag{2.8}$$

unde

$$\gamma_n = \frac{1}{f'(x_n)}$$

Metodele modificate corespunzătoare lor le vom obţine dacă notăm

$$\varphi_2(x) \equiv x - (a_0^{(2)}f(x) + a_0^{(1)})f(x),\ (a_0^{(2)},\ a_0^{(1)},\ \text{din (2.5)})$$

cu proprietatea

$$x'_{n+1} = \varphi_2(x'_n).$$

sau

$$\psi_2(x) \equiv x - (b_0^{(2)}x + b_0^{(1)})f(x),\ (b_0^{(2)},\ \ b_0^{(1)},\ \text{din}\ \ (2.6)).$$

cu proprietatea

$$x'_{n+1} = \psi_2(x'_n).$$

Scrise pe larg, obţinem [3] V [4]

$$x'_{n+1} = x'_n - \left[1 + \gamma_0 f''(x_0)\gamma_0 f(x_0) - \frac{1}{2}\gamma_0 f''(x_0)\gamma_0(x'_n)\right]\gamma_0 f(x'_n). \tag{2.7'}$$

sau

$$x'_{n+1} = x' - \left(1 - \frac{1}{2}\gamma_0 f''(x_0)\gamma_0 f(x_0)\right)^{-1} \tag{2.8'}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\gamma_0 f''(x_0)(x'_n - x_0)\right)\gamma_0 f(x'_n),\ (x'_0 = x_0).$$

Observația 2°. Din cele prezentate apare evidență calea ce trebuie urmată pentru obținerea altor metode de bază și modificate, considerînd contactul de ordin p, ($p \in N_2$), dintre curba $y = f(x)$ și familia de parabole

$$x = a_n^{(p)} Y^p + a_n^{(p-1)} Y^{p-1} + \ldots + a_n^{(1)} Y + a_n^{(0)}, \qquad (n \in N_0)$$

sau de hiperbole

$$x = b_n^{(p)} x^{p-1} Y + b_n^{(p-1)} x^{(p-2)} Y + \ldots + b_n^{(2)} xY + b_n^{(1)} Y + b_n^{(0)}, \qquad (n \in N_0)$$

3. Ne vom limita, în prezenta lucrare, la cazul $p = 3$, $a_n^{(p)} \vee b_n^{(p)}$, ($p = 0, 1, 2, 3$), fiind soluția sistemului

$$\tag{3.1} \left.\begin{aligned} x &= a_n^{(3)} f^3(x) + a_n^{(2)} f^2(x) + a_n^{(1)} f(x) + a_n^{(0)} \\ 1 &= a_n^{(3)}(f^3(x))' + a_n^{(2)}(f^2(x))' + a_n^{(1)} f'(x) \\ 0 &= a_n^{(3)}(f^3(x))'' + a_n^{(2)}(f^2(x))'' + a_n^{(1)} f''(x) \\ 0 &= a_n^{(3)}(f^3(x))'' + a_n^{(2)}(f^2(x))''' + a_n^{(1)} f'''(x) \end{aligned}\right|_{x=x_n}$$

sau a sistemului

$$\tag{3.2} \left.\begin{aligned} x &= b_n^{(3)} (x^2 f(x)) = b_n^{(2)} (x f(x)) = b_n^{(1)} f(x) + b_n^{(0)} \\ 1 &= b_n^{(3)} (x^2 f(x))' + b_n^{(2)} (x f(x))' + b_n^{(1)} f'(x) \\ 0 &= b_n^{(3)} (x^2 f(x))'' + b_n^{(2)} (x f(x))'' + b_n^{(1)} f''(x) \\ 0 &= b_n^{(3)} (x^2 f(x))''' + b_n^{(2)} (x f(x))''' + b_n^{(1)} f'''' (x) \end{aligned}\right|_{x=x_n}$$

adică

$$\tag{3.3} a_n^{(3)} = \frac{3f''^2(x_n) - f'''(x_n)f'(x_n)}{6f'^5(x)}$$

$$a_n^{(2)} = \frac{f'''(x_n)f'(x_n)f(x_n) - 3f''^2(x_n)f(x_n) - f''(x_n)f'^2(x_n)}{2f'^5(x_n)}$$

$$a_n^{(1)} = \frac{2f'^4(x_n) + 2f''(x_n)f'^2(x_n)f(x_n) + 3f''^2(x_n)f^2(x_n) - f'''(x_n)f'(x_n)f^2(x_n)}{2f'^5(x_n)}$$

$$a_n^{(0)} = x_n - \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{f'''(x_n)}{f'(x_n)}\right]\left(\Upsilon_n f(x_n)\right)^2\right\} \Upsilon_n f(x_n)$$

sau

$$\tag{3.4} b_n^{(3)} = \frac{3f''^2(x_n) - 2f'''(x_n)f'(x_n)}{\delta_3(x_n)}$$

$$b_n^{(2)} = \frac{2f'''(x_n)f(x_n) - 6f''(x_n)f'(x_n) + 2(2f'''(x_n)f'(x_n) - 3f''^2(x_n))x_n}{\delta_3(x_n)}$$

$$b_n^{(1)} = \frac{12f'^2(x_n) - 6f''(x_n)f(x_n) + 2(3f''(x_n)f'(x_n) - f'''(x_n)f(x_n))x_n + (3f''^2(x_n) - 2f(x_n)f'''(x_n)f'(x_n))x_n^2}{\delta_3(x_n)}$$

$$b_n^{(0)} = x_n - \frac{12f'^2(x_n)f(x_n) - 6f''(x_n)f^2(x_n)}{\delta_3(x_n)}$$

unde

$$\delta_3(x_n) = 12f'^3(x_n) - 12f''(x_n)f'(x_n)f(x_n) + 2f'''(x_n)f^2(x_n)$$

Pentru a simplifica scrierea metodelor

$$(x_{n+1} = a_n^{(0)}) \vee (x_{n+1} = b_n^{(0)})$$

este util să introducem notațiile:

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\gamma_n f''(x_n), \qquad a_{3n} = \frac{1}{6}\gamma_n f''''(x_n)$$

$$a_n(x) = a_{2n}(\gamma_n f(x)), \qquad b_n(x) = a_{3n}(\gamma_n f(x))$$

$$h_{2,\lambda}(x_n) = 1 - \lambda a_n(x_n)$$

$$h_{3,\lambda}(x_n) = 1 - 2\lambda a_n(x_n) + \lambda b_n(x_n)(\gamma_n f(x_n))$$

$$k_n(x) = 3(\gamma_n f(x_n))^2 - 3(\gamma_n f(x_n))(\gamma_n f(x)) + (\gamma_n f(x))^2$$

Cu ajutorul lor obținem *metoda de bază* a parabolelor tangente [5]

(3.5) $\quad x_{n+1} = x_n - (1 + a_n(x_n) + (2a_{2n}^2 - a_{3n})(\gamma_n f(x_n))^2)\gamma_n f(x_n)$

sau *metoda de bază* a hiperbolelor tangente [6]

(3.6) $\quad x_{n+1} = x_n - h_{3,1}^{-1}(x_n)(1 - a_n(x_n))\gamma_n f_n(x_n)$

Metodele modificate corespunzătoare lor vor fi

(3.5)'' $\quad x'_{n+1} = x'_n - (a_0^{(3)} f^2(x'_n) + a_0^{(2)} f(x'_n) + a_0^{(1)}) f(x'_n), \ (a_0^{(p)}$ din (3.3))

sau

(3.6)'' $\quad x'_{n+1} = x'_n - (b_0^{(3)} x_n'^2 + b_0^{(2)} x'_n + b_0^{(1)}) f(x'_n), \ (b_0^{(p)}$ din (3,4))

Cu notațiile introduse, ele iau forma

(3.5)'

$$x'_{n+1} = x'_n - [1 + 2a_0(x_0) - a_0(x'_n) + (2a_{20}^2 - a_{30})k_0(x'_n)]\gamma_0 f(x'_n), \ (x'_0 = x_0)$$

sau

(3.6)'

$$x'_{n+1} = x'_n - h_{3,1}^{-1}(x_0)[1 - a_0(x_0) - (a_{20} - b_0(x'_n))(x'_n - x_0) + (a_{20}^2 - a_{30})$$
$$(x'_n - x_0)^2]\gamma_0 f(x'), \ (x'_0 = x_0)$$

Observația 3° Dacă notăm diferența $x_{n+1} - x_n$ în (1 4), (2 7), (2.8) (3.5) și (3.6) prin α_{1n}, α_{2n}, β_{2n}, α_{3n} și β_{3n}, atunci din aceste relații obținem

(1) $\quad f(x_n) + f'(x_n)\,\alpha_{1n} = 0$

(2) $\quad f(x_n) + f'(x_n)\,\alpha_{2n} + \frac{1}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}^2 = 0$

(3) $f(x_n) + f'(x_n)\,\beta_{2n} + \frac{1}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}\beta_{2n} = 0$

(4) $f(x_n) + f'(x_n)\,\alpha_{3n} + \frac{1}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}^2 + \frac{1}{6} f'''(x_n)\,\alpha_{1n}^3 - f''(x_n)(a_{2n}\alpha_{1n}^2)\alpha_{1n} = 0$

(5) $f(x_n) + f'(x_n)\,\beta_{3n} + f''(x_n)\,\alpha_{1n}\beta_{3n} + \frac{1}{6} f'''(x_n)\,\alpha_{1n}^2\beta_{3n} - \frac{1}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}^2 = 0$

4. Pe baza relaţiilor (2) $\wedge$ (3)) $\vee$ (4) $\wedge$ (5)) putem obţine noi *metode de bază* ca o *combinaţie liniară* de forma

(4.0) $((1-\lambda)\ (2) + \lambda\,(3) = 0)\ \vee\ ((1-\lambda)\,(4) + \lambda\,(5) = 0),\ (\lambda \in \mathbf{R}).$

În acest scop vom introduce aceeaşi notaţie pentru $x_{n+1} - x_n$ în relaţiile cu ajutorul cărora obţinem noua metodă.

Astfel pentru

$$((x_{n+1} - x_n = \delta_{2n,\lambda})\ \vee\ (x_{n+1} - x_n = \delta_{3n}))\ \wedge\ (4.0) \Rightarrow\ 6)\ \vee\ (7)$$

(6) $f(x_n) + f'(x_n) + \left(f'(x_n) + \frac{\lambda}{2} f''(x_n)\alpha_{1n}\right)\delta_{2n,\lambda} + \frac{1-\lambda}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}^2 = 0$

sau

(7) $$f(x_n) + (f'(x_n) + \lambda f''(x_n)\,\alpha_{1n} + \frac{\lambda}{6} f'''(x_n)\,\alpha_{1n}^2)\,\delta_{3n,\lambda} +$$

$$+ \frac{1-2\lambda}{2} f''(x_n)\,\alpha_{1n}^2 + (1-\lambda)\left(\frac{1}{6} f'''(x_n)\,\alpha_{1n}^3 - f''(x_n)(a_{2n}\alpha_{1n}^2)\alpha_{1n}\right) = 0$$

În definitiv,

(4.1) $$x_{n+1} = x_n - h_{2,\lambda}^{-1}(x_n)[1 + (1-\lambda)\,a_n(x_n)]\,\gamma_n f(x_n)$$

sau

(4.2) $$x_{n+1} = x_n - h_{3,\lambda}^{-1}(x_n)\,[1 + (1-2\lambda)\,a_n(x_n) + (1-\lambda)(2a_{2n}^2 -$$

$$- a_{3n})(\gamma_n f(x))^2]\,\gamma_n f(x_n)$$

Evident, avem cazurile particulare

$$\delta_{2n,0} = \alpha_{2n},\quad \delta_{2n,1} = \beta_{2n};$$

pentru

$\delta_{2n,2}$ metoda este dată în [7],

iar

$\delta_{2n,\lambda}$, (4.1), metoda este dată în [8].

La fel,

$$\delta_{3n,0} = \alpha_{3n},\ \delta_{3n,1} = \beta_{3n};$$

iar

$\delta_{3n,\lambda}$, (4.2), o prezentăm acum.

Pentru metodele modificate (1.4)', (2.7)', (2.8)', (3.5)' și (3.6)', cu notații corespunzătoare, avem

$$(1)' \quad f(x_n') + f'(x_0)\,\alpha_{1n}' = 0$$

$$(2)' \quad f(x_n') + f'(x_0)\,\alpha_{2n}' + f''(x_0)\,\alpha_{10}\,\alpha_{1n} - \frac{1}{2}f''(x_0)\alpha_{1n}'^2 = 0$$

$$(3') \quad f(x_n') + f'(x_0)\,\beta_{2n}' + \frac{1}{2}f''(x_0)\,\alpha_{10}\beta_{2n}' + \frac{1}{2}f''(x_0)(x_n' - x_0)\alpha_{1n}' = 0$$

$$(4)' \quad f(x_n') + f'(x_0)\,\alpha_{3n}' + f''(x_0)\,\alpha_{10}\alpha_{1n}' - \frac{1}{2}f''(x_0)\,\alpha_{1n}'^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\gamma_0 f''^2(x_0) - \frac{1}{6}f'''(x_0)\right)\alpha_{10}k_0(x_n') = 0$$

$$(5)' \quad f(x_n') + f'(x_0)\,h_{3,1}(x_0)\beta_{3n}' - \frac{1}{2}f''(x_0)\,\alpha_{10})\,\alpha_{1n}' +$$

$$+\left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \frac{1}{6}f'''(x_0)\,\alpha_{1n}'\right)(x_n' - x_0)\,\alpha_{1n}' -$$

$$-f''(x_0)(a_{20}(x_n' - x_0)^2)\,\alpha_{1n}' + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x_n' - x_0)^2\alpha_{1n}' = 0$$

Considerăm din nou *combinația liniară* de forma

$$(4.0)' \quad ((1-\lambda)(2)' + \lambda(3)' = 0 \vee (((1-\lambda))(4)' + \lambda(5)' = 0),\ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Notînd

$$((x_{n+1}' - x_n' = \delta_{2n,\lambda}') \vee (x_{n+1}' - x_n' = \delta_{3n,\lambda}')) \wedge (4.0)' \Rightarrow (6)' \vee (7)'$$

$$(6)' \quad h_{2,\lambda}(x_0)\,\delta_{2n,\lambda}' = -[1 + (1-\lambda)(2a_0(x_0) - a_0(x_n')) - \lambda a_{20}(x_n' - x_0)]\gamma_0 f(x_n')$$

sau

$$(7)' \quad h_{3,\lambda}(x_0)\,\delta_{3n,\lambda}' = -\{1 + (2-3\lambda)\,a_0(x_0) - (1-\lambda)[a_0(x_n') -$$

$$-(2a_{20}^2 - a_{30})k_0(x_n')] - \lambda\,[(a_{20} - b_0(x_n'))\,(x_n' - x_0) +$$

$$+(a_{20}^2 - a_{30})(x_n' - x_0)^2]\}\gamma_0 f(x_n')$$

În sfirșit,

$$(4.1)' \quad x_{n+1}' = x_n' - h_{2,\lambda}^{-1}(x_0)[1 + (1-\lambda)(2a_0(x_0) - a_0(x_n')) -$$

$$-\lambda a_{20}(x_n' - x_0)]\gamma_0 f(x_n')$$

sau

$$(4.2)' \quad x_{n+1}' = x_n' - h_{3,\lambda}^{-1}(x_0)\{1 + (2-3\lambda)\,a_0(x_0) - (1-\lambda)[a_0(x_n') -$$

$$-(2a_{20}^2 - a_{30})k_0(x_n')] - \lambda[(a_{20} - b(x_n'))(x_n' - x_0) +$$

$$+(a_{20}^2 - a_{30})(x_n' - x_0)^2]\}\gamma_0 f(x_n')$$

Desigur, avem şi aici cazurile particulare

$$\delta'_{2n,0} = \alpha'_{2n}, \quad \delta'_{2n,1} = \beta'_{2n};$$

$\delta'_{2n,2} \wedge \delta'_{2n,\lambda}$ sint date în [9] $\wedge$ [10] (pentru ecuaţii generale).

La fel,

$$\delta'_{3n,0} = \alpha'_{3n}, \quad \delta'_{3n,1} = \beta'_{3n};$$

iar

$\delta'_{3n,\lambda}$, (4.2)', o prezentăm acum.

Observaţia 4°. În lucrările menţionate atît metodele de bază, cît şi cele modificate, corespunzătoare lor, sînt obţinute pe diverse căi, fără o legătură în ceea ce priveşte modul de construcţie. Felul în care le-am expus aici dezvăluie atît legătura dintre ele, cît şi posibilitatea de generalizare sub acest aspect.

Menţionăm faptul că în [11] şi [12] sînt date metode modificate pentru parabole şi hiperbole tangente, păstrînd aceeaşi formă ca şi metodele de bază, cu deosebirea doar că $f'(x_n)$ şi $f''(x_n)$ păstrează valoarea constantă $f'(x_0)$ şi $f''(x_0)$ în tot cursul procesului iterativ.

5. Putem presupune, fără a restringe generalitatea, că rădăcina x^* se află chiar în (a, b), unde

$$(a,b > 0) \wedge (b > a)^{3)},$$

fapt ce se exprimă prin

$(f(a)f(b) < 0) \wedge (f'(x), f''(x)$ păstrează semn const. pe [a,b]).

Analizînd cazurile ce se pot ivi, numai 1°–4°:

1°	$f(a) > 0;\ f(b) < 0$	2°	$f(a) > 0;\ f(b) < 0$
	$f'(x) < 0;\ f''(x) > 0$		$f'(x) < 0;\ f''(x) < 0$
3°	$f(a) < 0;\ f(b) > 0$	4°	$f(a) < 0;\ f(b) > 0$
	$f'(x) > 0;\ f''(x) < 0$		$f'(x) > 0;\ f''(x) > 0$

satisfac condiţiile menţionate.

Este necesar să ştim, pentru fiecare metodă, de unde începe procesul iterativ; adică cum trebuie aleasă aproximaţia iniţială $x_0 = a \vee b$ aşa încît $x_n \to x^*$.

Luăm pe rînd fiecare metodă [4]. Astfel

— pentru (0.4) avem $(1° \wedge 3°,\ x_0 = b) \vee (2° \wedge 4°,\ x_0 = a)$

— pentru (1.4) avem $(1° \wedge 3°,\ x_0 = a) \vee (2° \wedge 4°,\ x = b)$; $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$

— pentru (2.7) notăm $\alpha \equiv x_1$ (din (1.4)), iar $\beta \equiv x_1$ (din (2.7)) şi discutăm semnul diferenţei $\beta - \alpha$.

---

3) Orice interval (c,d) poate fi redus la acesta.

4) Pentru (0.4) şi (1.4) indicăm numai rezultatul; demonstraţia este simplă şi se găseşte aproape în toate cursurile de analiză matematică sau de analiză numerică.

Avem

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\beta = \alpha_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_0)f^2(x_0)}{f'^3(x_0)}$$

deci

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_0)f(x_0)}{f'^2(x_0)}\left(-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$$

şi atunci obţinem

$$(1^\circ \wedge 3^\circ,\ x_0 = \mathrm{a},\ \beta - \alpha > 0) \vee (2^\circ \wedge 4^\circ,\ x_0 = b,\ \beta - \alpha < 0)$$

în ambele cazuri $f''x\ (x_0)f(x_0) > 0$

— pentru (2—8), cu aceleaşi notaţii, obţinem

$$\beta - \alpha = -\frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'^2(x_0) - f''(x_0)f(x_0)}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \wedge (x_0 = \mathrm{a} \vee \mathrm{b})\,;\ \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$$

adică tocmai rezultatul precedent $f''(x_0)f(x_0) > 0$.

— pentru (3.5) $\vee$ (3.6) vom nota $\delta \equiv x_1$ şi vom discuta semnul diferenţei $\delta - \beta$, $\beta \equiv x_1$ din (2.7) $\vee$ (2.8).

— pentru (4.1) cu $\lambda = 2$ avem

$$\beta - \alpha = -\frac{1}{2}\,\frac{f''(x_0)f(x_0)}{f'^2(x_0) - f''(x_0)f(x_0)}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \wedge (x_0 = \mathrm{a} \vee \mathrm{b})\,;\ \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$$

rezultă tot $f''(x_0)f(x_0) > 0$.

De fapt, urmărim ca trecînd de la o metodă „inferioară" la alta „superioară", din cadrul aceluiaşi tip de metode (parabolă, hiperbolă sau combinaţia lor liniară), să ne apropiem mai mult de soluţie chiar de la primul pas al iteraţiei. Acest lucru putea fi exprimat mai simplu cu ajutorul *ordinului de convergenţă* a metodei utilizate [13].

Pentru (1.4)', (2.7)', (2.8)', (3.5)' şi (3.6)' ne limităm a indica doar interpretarea geometrică: $x_1' = x_1$ deoarece $x_0' = x_0$, iar x_n' sînt intersecţiile familiare de drepte (curbe) paralele cu dreapta (curba) tangentă (osculatoare) dusă în $(x_0, f(x_0))$, dreptele (curbele) respective trecînd prin $(x_n', f(x_n'))$, $(n \in N_2)$.

Pentru asigurarea convergenţei $(x_n' \to x^*)$ în cazul metodei (0.4)' trebuie impusă o condiţie suplementară începînd cu x_2'[*]. Ne vom limita numai la cazul 4°, $(x_0 = a)$.

Într-adevăr,

$$(0.4)' \qquad x_{n+1}' = x_n' - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\,f(x_n')$$

pentru $n = 0$ obţinem

$$(5.1)' \qquad x_1' = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\,f(a) = b - \frac{(b - a)}{f(b) - f(a)}\,f(b)$$

*) Condiţia respectivă nu-i esenţială din punct de vedere teoretic, deoarece pe baza continuităţii lui f, întotdeauna există o vecinătate a soluţiei unde o astfel de condiţie este satisfăcută; însă avem în vedere şi caracterul aplicativ al metodei.

de unde

$$a = x'_0 < x'_1 < b,$$

iar pentru $n = 1$ obţinem

$$(5.2)' \qquad x'_2 = x'_1 - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x'_1) = b - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} (f(b) + f(x'_1))$$

de unde

$$(x'_1 < x'_2) \wedge ((x'_2 < x^*) \wedge (x'_2 < b))$$

numai dacă

$$(f(x'_1) \wedge f(x'_2) < 0)) \wedge (f(b) + f(x'_1)) > 0)$$

şi atunci

$$a_0 = x'_0 < x'_1 < x'_2 < x^* < x \; < b$$

În rest demonstraţia continuă prin inducţie completă.

Observaţia 5°. Remarcăm faptul că $x'_n \neq x_n$, $(n \in N_2)$.

6. În continuare ne ocupăm de evaluarea erorii $(|x^* - \bar{x}^*|)$, presupunînd satisfăcute condiţiile:

$$(|f'(x)| \geqslant m_1) \wedge (|f^{(p)}_{(x)}| \leqslant M < +\infty), \; (p \in \overline{N}_1 \wedge x \in [a, b])$$

Observaţia 6°. Pentru toate metodele ne putem servi de relaţia [14]

$$|f(x^*) - f(\bar{x}^*)| = |x^* - \bar{x}^*| \, |f'(c)|, \; c \in (x^*, \; \bar{x}^*),$$

sau

$$|f(\bar{x}^*)| \geqslant |x^* - \bar{x}^*| \; m_1$$

deci

$$|x^* - \bar{x}^*| \leqslant \frac{|f(\bar{x}^*)|}{m_1}$$

Pe lîngă rezultatul acestei observaţii, pentru fiecare metodă putem da şi alte formule de evaluare a erorii. Astfel:

— pentru (0.4) avem

$$(a) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{b-x}{f(b)-f(x_n)} f(x_n) = b - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(b), \quad (x_0 = a)$$

sau

$$(b) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)} f(x_n) = a - \frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)} f(a), \quad (x_0 = b)$$

din care obţinem

$$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < x^* < b) \vee (a < x^* < \ldots < x_n < \ldots < x_1 < x_0 = b)$$

Ne ocupăm numai de $(2° \wedge 4°,\ x_0 = a)$. Din

$$(a) \wedge f(x^*) = 0$$

avem

$$f(x^*) - f(x_n) = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}(x_{n+1} - x_n) \tag{6.1}$$

Însă

$$(f(x^*) - f(x_n) = (x^* - x_n)f'(c_n^*)) \wedge (f(b) - f(x_n) = = (b - x_n)f'(c_n)), \tag{6.2}$$

unde

$$c_n^* \in (x_n,\ x^*) \wedge c_n \in (x_n,\ b)$$

apoi

$$((6.2) \wedge (6.2)) \Rightarrow (6.3)$$

$$(x^* - x_n)f'(c_n) = (x_{n+1} - x_n)f'(c_n) \tag{6.3}$$

În consecință

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{|f'(c_n) - f'(c_n^*)|}{|f'(c_n^*)|}|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_{n+1} - x_n| \tag{6.4}$$

Dacă pentru $x \in$ [a, b] avem $M_1 \leqslant 2m_1$, atunci $(6.4) \Rightarrow (6.5)$

$$|x^* - x_{n+1}| \leqslant |x_{n+1} - x_n| \tag{6.5}$$

Dacă ne referim la situația cînd este dat ε încît

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,\ \text{atunci}\ (6.5) \Rightarrow (6.6)$$

$$|x^* - x_{n+1}| < \varepsilon \tag{6.6}$$

Utilizînd $f''(x)$, $(6.3) \Rightarrow (6.7)$

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{|f'(c_n^*) - f'(c_n)|}{|f'(c_n)|}|x^* - x_n| \leqslant \frac{M_2(b-a)}{m_1}|x^* - x_n| \tag{6.7}$$

— pentru (1.4) avem [14]

(6.8)

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n^*)(x^* - x_n),\ (c_n \in (x_n,\ x^*))$$

însă $((1.4) \wedge (6.8)) \Rightarrow (6.9)$

$$(x^* - x_{n+1})f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n^*)(x' - x_n)^2 = 0 \tag{6.9}$$

adică

$$|x^* - x_{n+1}| \leqslant q_2|x^* - x_n|^2,\quad \left(q_2 = \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}\right) \tag{6.10}$$

Tot pentru formula (6.10) ne putem servi de funcţia auxiliară

$$F(x) \equiv x - \gamma_n f(x)$$

cu proprietăţile:

$$x^* = F(x^*),\ x_{n+1} = F(x_n),\ F'(x_n) = 0,\ F''(x_n) \neq 0$$

Rezultatul dorit îl obţinem din

$$(6.8)' \qquad |x^* - x_{n+1}| = |F(x^*) - F(x_n) - F'(x_n)|x^* - x_n|| = \\ = \frac{1}{2}|F''(c_n^*)||x^* - x_n|^2$$

— pentru (4.1) ne servim de funcţia auxiliară [10]

(6.11)

$$F_\lambda(x) \equiv x - h_{2,\lambda}^{-1}(x_n)[1 + (1-\lambda)(2a_n(x_n) - a_n(x)) - \lambda a_{2n}(x - x)]\gamma_n f(x)$$

cu proprietăţile:

$$x^* = F_\lambda(x^*),\ x_{n+1} = F_\lambda(x_n),\ F_\lambda'(x_n) = F_\lambda''(x_n) = 0, \\ F_\lambda'''(x_n) \neq 0$$

Avînd în vedere

$$(6.12) \qquad |x^* - x_{n+1}| = \Big| F_\lambda(x^*) - F_\lambda(x_n) - F_\lambda'(x_n)(x^* - x_n) - \\ - \frac{1}{2} F_\lambda''(x_n)(x^* - x_n)^2 \Big| = \frac{1}{6}|F_\lambda'''(c_n^*)||x - x_n|^3$$

şi presupunerile referitoare la mărginirea derivatelor, obţinem

$$(6.13) \qquad |x^* - x_{n+1}| \leqslant q_3(\lambda)|x^* - x_n|^3, \quad (q_3(\lambda) = \text{const.})$$

— pentru (4.2) ne servim de funcţia auxiliară

$$(6.14) \quad F_\lambda(x) \equiv x - h_{3,\lambda}^{-1}(x_n)\{1 + (2 - 3\lambda)\,a_n(x_n) - (1-\lambda)[a_n(x) - \\ - (2a_{2n}^2 - a_{3n})\,h_n(x)] - \lambda[(a_{2n} - b_n(x_n))\,(x - x_n) + \\ + (a_{2n}^2 - a_{3n})\,(x - x_n)]\}\gamma_n f(x)$$

cu proprietăţile:

$$x^* = F_\lambda(x^*),\ x_{n+1} = F_\lambda(x_n),\quad F_\lambda^{(p)}(x_n) = 0,\ (\mathrm{p} = 1,\ 2,\ 3),\quad F_{\lambda(x_n)}^{(4)} \neq 0$$

deci

$$(6.15) \quad |x^* - x_{n+1}| = \Big|F_\lambda(x^*) - F_\lambda(x_n) - \ldots - \frac{1}{6}F_\lambda'''(x_n)(x^* - x_n)^3\Big| = \\ = \frac{1}{4!}|F_\lambda^{(4)}(c_n^*)||x^* - x_n|^4$$

adică

$$(6.16) \qquad |x^* - x_{n+1}| \leqslant q_4(\lambda)|x^* - x_n|^4, \quad (q_4(\lambda) = \text{const.})$$

Evident, pentru (2.7) $\vee$ (2.8) ne servim de $F_0(x) \vee F_1(x)$ din (6.11), iar pentru (3.5) $\vee$(3.6) ne servim de $F_0(x) \vee F_1(x)$ din (6.14).

7. În încheiere, ilustrăm cele de mai sus pe următorul exemplu:

$$f(x) \equiv x^3 + 3x^2 + x - 1,\ (f(x) = 0 \wedge x^* \in (0,1)),$$

iar rezolvarea se poate urmări din tabelele 1 şi 1'.

Observaţia 7°. Pentru aproximaţia iniţială $x_0 = 1$, soluţia se găseşte în sfera

$$\bar{S}(1,r) = |x - 1| \leqslant 0{,}8$$

deoarece 15]

$$\left(\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \eta_0\right) \wedge \frac{1}{|f'(x_0)|} = B_0, \text{ iar soluţia se găseşte în } \bar{S}(x_0, 2\eta_0).$$

Şirul $x_n \in \bar{S}$ converge către x^*, fiindcă

$$h_0 \equiv B_0 M_2 \eta_0 = \frac{12}{25} < \frac{1}{2}.$$

Tabelul 1

Metoda	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	$f'''(x_n)$
(0.4)	0	0	−1			
	1	0,20000	−0,67200			
	2	0,31606	−0,35589			
(1.4)	0	1	4	10		
	1	0,60000	0,89600	5,68000		
	2	0,44228	0,11553	4,24033		
(4.1), $\lambda = 0$ (2.7)	0	1	4	10	12	
	1	0,50400	0,39405	4,78603	9,02400	
	2	0,42102	0,02748	4,05805	8,52624	
(4.1), $\lambda = 1$ (2.8)	0	1	4	10	12	
	1	0,47369	0,25312	4,51526	8,84214	
	2	0,41438	0,00068	4,02039	8,48628	
(4.1), $\lambda = 2$	0	1	4	10	12	
	1	0,41539	0,00471	4,00999	8,49234	
	2	0,41422	0,00003	4,00006	8,48532	
(4.2) $\lambda = 0$ (3.5)	0	1	4	10	12	6
	1	0,46432	0,21119	4,43269	8,78592	6
	2	0,41424	0,00004	4,00011	8,48531	6
(4.2), $\lambda = 1$ (3.6)	0	1	4	10	12	6
	1	0,43284	0,07562	4,15909	8,59704	6
	2	0,41431	0,03228	4,02568	8,48586	6
(4.2), $\lambda = -2$	0	1	4	10	12	6
	1	0,48183	0,29017	4,58746	8,89098	6
	2	0,41409	−0,00050	3,99895	8,48454	6

Tabelul 1'

Metoda	n	x_n	$f(x_n)$
(0.4)'	0	0	-1
	1	0,20000	$-0,67200$
	2	0,33440	$-0,67200$
(1.4)'	0	1	4
	1	0,60000	0,89600
	2	0,51040	0,42485
(4.1)', $\lambda = 0$ (2.7)'	0	1	4
	1	0,50400	0,39405
	2	0,44661	0,13507
(4.1)', $\lambda = 1$ (2.8)'	0	1	4
	1	0,47368	0,25312
	2	0,42987	0,09368
(4.1)', $\lambda = 2$	0	1	4
	1	0,41539	0,00471
	2	0,41429	0,00032
(4.2)', $\lambda = 0$ (3.5)'	0	1	4
	1	0,46432	0,21119
	2	0,42737	0,05337
(4.2)', $\lambda = 1$ (3.6)'	0	1	4
	1	0,43284	0,07562
	2	0,42154	0,02951
(4.2)', $\lambda = -2$	0	1	4
	1	0,48183	0,29017
	2	0,42637	0,44925

$f(x_0) = 4$

$f'(x_0) = 10$

$f''(x_0) = 12$

$f'''(x_0) = 6$

$h_{2,1}(x_0) = 0,76$

$h_{2,2}(x^0) = 0,52$

$h_{3,1}(x_0) = 0,64$

$h_{3,-2}(x_0) = 1,928$

$2\, a_{20} - a_{30} = 0,62$

$a_{20}^2 - a_{30} = 0,35$

BIBLIOGRAFIE

1. P. L. Gebișev, Sabr. soci. D A N S S S R, M—L, 1951, 7—25.
2. G. S. Salehov, *O shodimosti proiessa casatelnih ghiperbol* D A N S S S R, 82(4), 1952, 525—528.
3. R. A. Safiev, *Ob odnoi modificații metoda Cebîșeva*, J. vicisl. mat. i mat-fiz., 3, 1963, 950—955.
4. R. A. Safiev, Ob odnoi modificații metoda casatelnih ghiperbol, D A N Azerb. S S R, 19, Nr. 1, 1963, 3—8.
5. E. Schröder, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann. 2(1870), 317—365.

6. I. S. Berezin i N. P. Jidcov, *Metodî vicislitelnii*, 1. 2. 1960, 478–479.
7. L. K. Vîhandu, *Ob iteraţionîh mathodah reşenia uravnenii*, Autoreferat, Tartu 1955.
8. Ü. Ia. Kaazic, *Ob odnom classe iteraţionnîh proţesov dlia priblejonnovo reşenia operatornîh uravnenii*, D A N S S S R, 12, Nr. 4, 1957, 579–582.
9. A. Gaidici şi P. Fornvald, *Despre o modificare a unui procedeu iterativ pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*, Bul. ştiinţific seria B Inst. ped. Baia–Mare, vol. III, 1971, 178–191.
10. A. Gaidici, *Asupra unei clase de metode iterative modificate ce se aplică la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*, Bul. ştiinţific, seria B, Inst. ped. Baia–Mare, vol. III, 1971, 193–199.
11. V. B. Miracov, *O majorantîe prinţip dlia metoda Cebîşeva*, U M N, 11, Nr. 8 (69) 1956, 171–174.
12. R. A. Safiev, *O metode casatelnîh ghiperbol*, D A N, S S S R, 149, Nr. 4, 1963, 788–791.
13. H. Ehrman, *Konstruction und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 1959/1960, 65–88.
14. B. P. Demidovici i I. A. Maron, *Osnovî vicislitelnoi mat*. Moskva 1970, 127–128.
15. L. V. Kantorovici, *O metoda Niutona*, Tr. mat. in-ta imeni Steklova, 28, 1949, 104–144.

REZUMAT

(Résumé)

Cette étude présente des nouvelles methodes, itérationes fundamentales et modifiées destinées a'resendre l'équation $f(x) = 0$, ou $f: [a, b] \to R \wedge [a, b] \subset R$.

Osi indique également le mode d'obtenir ces nouvelles méthodes, en postant de la notion de contact de doux courves.