OBȚINEREA UNOR FORMULE DE TIP RUNGE—KUTTA—FEHLBERG PENTRU APROXIMAREA SOLUȚIEI ECUAȚIEI INTEGRALE DE TIP VOLTERRA

de

I. COROIAN

1. Formulele de tip Runge-Kutta ne oferă un mijloc eficace pentru integrarea numerică a ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale. E. Fehlberg într-o serie de lucrări, printre care [2], [3], printr-o transformare convenabilă a ecuației diferențiale, respectiv a sistemului, obține formule cu ordinul de exactitate mult mai mare și foarte simple.

Aplicarea metodelor de tip Runge-Kutta la integrarea numerică a ecuațiilor integrale nelineare de tip Volterra s-a făcut de către o serie de autori [1], [5]. În [4] se folosește ideia lui Fehlberg pentru cazul ecuațiilor integrale nelineare Volterra. În prezenta lucrare vom folosi aceeași ideie și vom obține formule de tip Runge—Kutta—Fehlberg (R—K—F) cu ordinul de exactitate $m+3$, m un număr natural dat, pentru ecuația integrală nelineară Volterra.

2. Să considerăm o ecuație integrală Volterra, care se știe că se poate prin schimbarea funcției necunoscute aduce la forma

$$z(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi[x,t,z(t)]\,dt. \tag{1}$$

Presupunem că funcția reală $\varphi(x,t,z)$ este continuă și admite derivate parțiale continue pînă la un ordin suficient de mare pentru

$$x\in[x_0,x_0+a],\ t\in[x_0,x_0+a],\ |z|<+\infty,\ a>0.$$

În locul funcției necunoscute $z(x)$ vom introduce o nouă funcție necunoscută $y(x)$ care să satisfacă condițiile

$$y(x_0)=z(x_0)=0,\ y'(x_0)=y''(x_0)=\ldots=y^{(m+1)}(x_0)=0, \tag{2}$$

unde m este un număr natural fixat.
Se constată că condițiile (2) vor fi satisfăcute dacă $y(x)$ se obține din transformarea „de lungime m"

$$z(x)=\omega(x,y)=y(x)+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\left[\frac{\partial^{i-1}F(x,t)}{\partial t^{i-1}}\right]_{t=x_0}, \tag{3}$$

unde $F(x,t)=\varphi[x,t,z(t)]$.

În urma transformării (3) ecuația (1) devine

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}f[x,t,y(t)]\,dt. \tag{4}$$

unde am notat

$$f[x, t, y(t)] = \varphi[x, t, \omega(x, y)] - \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(t-x_0)^{i-1}}{(i-1)!} \left[\frac{\partial^{i-1} F(x, t)}{\partial t^{i-1}}\right]_{t=x_0}.$$

Acum se verifică din aproape în aproape că funcţia f satisface condiţiile

$$\left[\frac{\partial^{p+k} f(x, t, y(t))}{\partial x^p \partial t^k}\right]_{t=x_0} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m; \; p \in N. \tag{5}$$

Metoda R—K—F pentru găsirea soluţiei aproximative $\bar{z}(x)$ a ecuaţiei integrale (1) constă în găsirea soluţiei aproximative $\bar{y}(x)$ a ecuaţiei (4) printr-o formulă oarecare de tip Runge—Kutta şi apoi din (3), unde $y(x)$ se înlocuieşte cu $\bar{y}(x)$ se obţine $\bar{z}(x)$.

3. Vom deduce formule simple R—K—F cu ordinul de exactitate $m+3$, adică $y(x) - \bar{y}(x) = 0\ (h^{m+4})$, $h = x - x_0$ fiind pasul integrării, formule cu 3 substituţii, deci cu care soluţia aproximativă $\bar{y}(x)$ se obţine prin calculul valorilor funcţiei $f(x, t, u)$ în 3 puncte. Vom lua atunci

$$y(x) = y(x_0 + h) \approx \bar{y}(x_0 + h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3, \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0 + \alpha_1 h,\ x_0 + \beta_1 h,\ y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \alpha_2 h,\ x_0 + \beta_2 h, y_0 + \gamma_1 k_1), \\ k_3 &= hf(x_0 + \alpha_3 h,\ x_0 + \beta_3 h, y_0 + \gamma_2 k_1 + \gamma_3 k_2). \end{aligned} \tag{6'}$$

Urmează să determinăm constantele α_i, β_i, γ_i, c_i, $i = 1, 2, 3$, astfel ca desvoltările în serie Taylor după puterile lui h a soluţiei exacte $y(x_0 + h)$ şi a soluţiei aproximative $\bar{y}(x_0 + h)$ să coincidă pînă la termenii în h^{m+3} inclusiv.

Pentru soluţia exactă $y(x_0 + h)$, avînd în vedere (2), dezvoltarea va fi

$$y(x_0 + h) = \frac{1}{(m+2)!} y^{(m+2)}(x_0)\, h^{m+2} + \frac{1}{(m+3)!} y^{(m+3)}(x_0) h^{m+3} + O(h^{m+4}), \tag{7}$$

cu derivatele avînd expresiile

$$y^{(m+2)}(x_0) = \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}}\right)_0, \tag{8}$$

$$y^{(m+3)}(x_0) = \left(\frac{\partial^{m+2} f}{\partial t^{m+2}}\right)_0 + (m+3)\left(\frac{\partial^{m+2} f}{\partial x \partial t^{m+1}}\right)_0 + \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \tag{9}$$

unde indicele zero arată că derviatele parţiale sînt calculate în punctul $x = x_0$, $t = x_0$.

Să arătăm de exemplu cum se deduce (8) cu ajutorul lui (2) şi (5). Derivînd ambii membri ai ecuaţiei (4) deducem

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, t, y(t))}{\partial x} \mathrm{d}t + f(x, x, y(x))$$

şi notînd

$$I_m(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial^m f(x, t, y(t))}{\partial x^m}\,\mathrm{d}t,$$

obţinem

$$y^{(m+2)}(x_0) = I_1^{(m+1)}(x_0) + \left[\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}} f(x, x, y(x))\right]_0.$$

Pentru al doilea termen din egalitatea precedentă avem

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{m+1}f}{\mathrm{d}x^{m+1}}\right)_0 = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\bigg|_0 = \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y'\right)\bigg|_0 +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}y'\right)\bigg|_0 + \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_0.$$

Derivatele termenilor care conţin ca factor pe y' se pot calcula cu formula derivatei de ordin superior a unui produs şi folosind condiţiile (2), acestea sînt nule în punctul $x = x_0$, $t = x_0$.

Astfel din aproape în aproape se obţine

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{m+1}f}{\mathrm{d}x^{m+1}}\right)_0 = \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\bigg|_0 + 2\,\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right)\bigg|_0 + \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\bigg|_0 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)\bigg|_0 + 3\,\frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t}\right)\bigg|_0 + 3\,\frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2}\right)\bigg|_0 + \frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)\bigg|_0 = \ldots =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)\bigg|_0 + C_m^1\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial t}\right)\bigg|_0 + \ldots + C_m^m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^m f}{\partial t^m}\right)\bigg|_0 =$$

$$= \left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m+1}}\right)_0 + C_{m+1}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^m \partial t}\right)_0 + \ldots + C_{m+1}^m\left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial x \partial t^m}\right)_0 + C_{m+1}^{m+1}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0.$$

Folosind acum relaţia (5), obţinem.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{m+1}f}{\mathrm{d}x^{m+1}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0.$$

În mod analog se deduce că

$$I_1^{(m+1)}(x_0) = I_2^{(m)}(x_0) = I_3^{(m-1)}(x_0) = \ldots = I'_{m+1}(x_0) = I_{m+2}(x_0) = 0.$$

Dezvoltările în serie Taylor a funcţiilor k_1, k_2, k_3 sînt

$$k_1 = \frac{\beta_1^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+2} + \frac{\beta_1^{m+2}}{(m+2)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial t^{m+2}}\right)_0 h^{m+3} + \tag{10}$$

$$+ \frac{\alpha_1\beta_1^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x \partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+3} + O(h^{m+4}).$$

$$(11)\qquad k_2 = \frac{\beta_2^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+2} + \frac{\beta_2^{m+2}}{(m+2)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial t^{m+2}}\right)_0 h^{m+3} +$$

$$+ \frac{\alpha_2\beta_2^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x\partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+3} + \frac{\gamma_1\beta_1^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 h^{m+3} + O(h^{m+4}).$$

$$(12)\qquad k_3 = \frac{\beta_3^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+2} + \frac{\beta_3^{m+2}}{(m+2)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial t^{m+2}}\right)_0 h^{m+3} +$$

$$\frac{\alpha_3\beta_3^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x\partial t^{m+1}}\right)_0 h^{m+3} + \frac{\gamma_2\beta_1^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 h^{m+3} +$$

$$+ \frac{\gamma_3\beta_2^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 h^{m+3} + O(h^{m+4}).$$

Înlocuind aceste dezvoltări în (6) și identificînd coeficienții puterilor lui h din (6) și (7) se obține sistemul de ecuații pentru parametri α_i, β_i, γ_i, c_i

$$(13)\qquad \begin{aligned}
&c_1\beta_1^{m+1} + c_2\beta_2^{m+1} + c_3\beta_3^{m+1} = \frac{1}{m+2},\\
&c_1\beta_1^{m+2} + c_2\beta_2^{m+2} + c_3\beta_3^{m+2} = \frac{1}{m+3},\\
&c_1\alpha_1\beta_1^{m+1} + c_2\alpha_2\beta_2^{m+1} + c_3\alpha_3\beta_3^{m+1} = \frac{1}{m+2},\\
&c_2\gamma_1\beta_1^{m+1} + c_3(\gamma_2\beta_1^{m+1} + \gamma_3\beta_2^{m+1}) = \frac{1}{(m+2)(m+3)}.
\end{aligned}$$

Acesta este un sistem algebric nelinear cu 12 necunoscute, astfel că o serie de necunoscute vor lua valori arbitrare. Sistemul este liniar în c_1, c_2, c_3, așa că c_1, c_2, c_3 se pot exprima din 3 ecuații în funcție de ceilalți parametri, care trebuie astfel aleși ca sistemul format de toate ecuațiile să fie compatibil (determinantul caracteristic al sistemului liniar să fie nul).
Din primele două ecuații și ecuația a patra a lui (13), obținem

$$(14)\qquad c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3,$$

unde

$$\Delta = \beta_1^{m+1}\beta_2^{m+1}(\gamma_2\beta_1^{m+1} + \gamma_3\beta_2^{m+1})(\beta_2 - \beta_1) - \gamma_1\beta_1^{2m+2}\beta_3^{m+1}(\beta_3 - \beta_1),$$

$$\Delta_1 = \beta_2^{m+1}(\gamma_2\beta_1^{m+1} + \gamma_3\beta_2^{m+1})\left(\frac{1}{m+2}\beta_2 - \frac{1}{m+3}\right) -$$

$$- \gamma_1\beta_1^{m+1}\beta_3^{m+1}\left(\frac{1}{m+2}\beta_3 - \frac{1}{m+3}\right) + \frac{1}{(m+2)(m+3)}\beta_2^{m+1}\beta_3^{m+1}(\beta_3 - \beta_2),$$

$$\Delta_2 = \beta_1^{m+1}(\gamma_2\beta_1^{m+1} + \gamma_3\beta_2^{m+1})\left(\frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+2}\beta_1\right) -$$

$$- \frac{1}{(m+2)(m+3)}\beta_1^{m+1}\beta_3^{m+1}(\beta_3 - \beta_1),$$

$$\Delta_3 = \gamma_1\beta_1^{2m+2}\left(\frac{1}{m+2}\beta_1 - \frac{1}{m+3}\right) + \frac{1}{(m+2)(m+3)}\beta_1^{m+1}\beta_2^{m+1}(\beta_2 - \beta_1).$$

Condiția de compatibilitate a sistemului (13) linear în c_1, c_2, c_3 va fi

$$\beta_2^{m+1}(\gamma_2\beta_1^{m+1}+\gamma_3\beta_2^{m+1})\left[\frac{1}{m+2}(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)-\frac{\alpha_2-\alpha_1}{m+3}+\frac{\beta_2-\beta_1}{m+2}\right]-$$

$$(15)\qquad -\gamma_1\beta_1^{m+1}\beta_3^{m+1}\left[\frac{1}{m+2}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)-\frac{\alpha_3-\alpha_1}{m+3}+\frac{\beta_3-\beta_1}{m+2}\right]-$$

$$-\frac{\beta_2^{m+1}\beta_3^{m+1}}{(m+2)(m+3)}\left[(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\right]=0.$$

Astfel am obținut următoarea
T E O R E M A. *Dacă constantele $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, iau valori reale arbitrare satisfăcînd relația (15) și pentru care Δ din (14) este diferit de zero iar c_1, c_2, c_3 sînt dați de (14) atunci (6) și (6') ne furnizează o clasă de formule de tip Runge-Kutta-Fehlberg de ordinul $m + 3$ pentru ecuația integrală neliniară (4) respectiv (1), adică avem $\bar{y}(x_0 + h) - y(x_0 + h) = O(h^{m+4})$.*
Vom da aici următoarea soluție numerică simplă a sistemului (13)

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,\ \beta_1=1,\ \beta_2=\frac{1}{2},\ \beta_3=\frac{1}{4},\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=\frac{1}{2^{m+1}},\ \gamma_3=-1,$$

$$c_1=\frac{2^{m+1}(3m+5)-1}{3\cdot 2^{m+1}(m+2)(m+3)},\quad c_2=\frac{1}{(m+2)(m+3)},\quad c_3=\frac{2^{m+2}(2^{m+2}-1)}{3(m+2)(m+3)}.$$

Observație. Se observă că dintre valorile date aici pentru parametri care intră la argumentele funcției f, numai γ_2 variază odată cu m astfel că soluția dată este avantajos să se aplice pentru diferite valori ale lui m.
Pentru $m = 2,3,4$, valorile coeficienților c_1, c_2, c_3 sînt

	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
c_1	$\frac{29}{160}$	$\frac{223}{1440}$	$\frac{131}{1344}$
c_2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$
c_3	4	$\frac{496}{45}$	32

De exemplu pentru $m = 2$ am obținut următoarea formulă simplă R—K—F cu ordinul de exactitate $m + 3 = 5$ pentru soluția ecuației (4)

$$y(x_0+h)\approx\frac{29}{160}k_1+\frac{1}{20}k_2+4\ k_3,$$

unde

$$k_1=hf(x_0+h,\ x_0+h,\ y_0),$$
$$k_2=hf(x_0+h,\ x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+k_1),$$
$$k_3=hf\left(x_0+h,\ x_0+\frac{1}{4}h,\ y_0+\frac{1}{8}k_1-k_2\right).$$

BIBLIOGRAFIE

1. Aparo, E. : *Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur.* 26, nr. 2, 1959, 183—188.
2. Fehlberg, E. : *Z.A.M.M.*, 38, 1958, 421—426.
3. Fehlberg, E. : *Z.A.M.M.*, 40, 1960, 252—259.
4. Lomakovici, A. M. : *Dopovidi Akad. Nauk Ukrainskoi S.S.R.*, seria A, 4, 1969 307—309.
5. Oulès, H. : *C. r. Acad. sci.*, 250, nr. 6, 1960, 964—965.

SOME RUNGE—RUTTA—FEHLBERG FORMULAS FOR THE NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA TYPE

(Abstract)

The nonlinear integral equation of Volterra type (1) is considered and the ideia of E. Fehlberg transformation from [2], [3] and [4] is used. A new unknown function $y(x)$ is introduced wich is given by an „m length" transformation (2) and a new integral equation (4) is obtained. For the equation (4) a class of Runge-Kutta type formulas (6), (6') of order $m + 3$ is derived.