FORMULE PRACTICE DE CUADRATURĂ, OPTIMALE PENTRU O CLASĂ DE FUNCŢII

de

DUMITRU ACU

Se consideră formula de cuadratură

$$
(1) \qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = A_{0,1}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)] +
$$
$$
+ A_{2,3}[f(x_2) + f(x_3) + f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] +
$$
$$
+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad +
$$
$$
+ A_{2p-2,2p-1}[f(x_{2p-2}) + f(x_{2p-1}) + f(x_{n-2p+1}) +
$$
$$
+ f(x_{n-2p+2})] + R_n[f],
$$

unde $A_{0,1},\ A_{2,3},\ \dots,\ A_{2p-2,2p-1},\ \left(1 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n-1}{4}\right]\right)$, sînt parametri arbitrari, iar nodurile sînt în progresie aritmetică cu raţia h, adică $x_i = x_0 + ih (i = 0(1)\ n)$.

Se pune problema determinării parametrilor $A_{2i-2,2i-1} (i = 1(1)p)$ în ipoteza că formula de cuadratură are gradul de exactitate dinainte dat, iar în cazul în care din condiţiile impuse de gradul de exactitate nu pot fi determinaţi toţi parametrii să fie satisfăcute condiţii suplimentare legate de o evaluare cît mai convenabilă a restului $R_n[f]$.

În această lucrare se studiază formula de tip (1), în ipoteza că gradul de exactitate este unu şi p arbitrar, pentru f aparţinînd clasei de funcţii $W^{(2)}(M\,;\ x_0,\ x_n)$ a funcţiilor definite pe intervalul $[x_0,\ x_n]$, avînd derivata de ordinul întîi continuă pe acest interval şi derivata de ordinul doi segmentar continuă şi satisfăcînd condiţia $|f''(x)| \leqslant M$.

Condiţiile suplimentare impuse asupra parametrilor $A_{2i-2,2i-1}(i = 1(1)p)$, vor fi astfel alese încît restul formulei să ia valorea minimă.

În prima parte a lucrării se va trata cazul cînd formula(1) este de tip închis, adică în membrul al doilea al formulei (1) se găsesc valorile funcţiei f pe nodurile x_0 şi x_n iar în partea a doua a lucrării se va trata cazul cînd formula (1) este de tip deschis, adică, în membrul al doilea al formulei (1) nu se găsesc valorile funcţiei f pe nodurile x_0 şi x_n.

1. Să considerăm integrala

$$
(2) \qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x
$$

unde $f \in W^{(2)}(M, x_0, x_n)$. Împărțim intervalul în n părți egale prin punctele $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0(1)n)$. Atașăm fiecărei părți $[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1(1)n)$ o funcție φ_i, integrală a ecuației diferențiale corespunzătoare

$$\varphi''(x) = 1, \ (i = 1(1)n). \tag{3}$$

Cu aceste condiții (2) devine

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i''(x)\, f(x)\mathrm{d}x,$$

sau aplicînd fiecărui termen din membrul al doilea formula generalizată de integrare prin părți, se obține

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = {} & \varphi_1'(x_0)f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i)]f(x_i) + \varphi_n'(x_n)\, f(x_n) + \\ & + \varphi_1(x_0)f'(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i)]f'(x_i) - \\ & - \varphi_n(x_n)f'(x_n) + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)f''(x)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4}$$

unde $\varphi(x)$ este funcția care coincide cu $\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ în intervalele $[x_0, \ x_1], \ [x_1, x_2], \ldots, \ [x_{n-1}, \ x_n]$.

Alegem funcțiile $\varphi_i (i = 1(1)n)$ integrale ale ecuațiilor diferențiale (3) care să satisfacă următoarele condiții la limită

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_0) = \varphi_n(x_n) = 0, \\ \varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}), \ (i = 1(1)\ n - 1) \\ -\varphi_1'(x_0) = \varphi_1'(x_1) - \varphi_2'(x_1) = \varphi_n'(x_n) = \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) - \varphi_n'(x_{n-1}) = A_{0,1}, \\ \varphi_{2i-2}'(x_{2i-2}) - \varphi_{2i-1}'(x_{2i-2}) = \varphi_{2i-1}'(x_{2i-1}) - \varphi_{2i}'(x_{2i-1}) = \\ = \varphi_{n-2i+2}'(x_{n-2i+2}) - \varphi_{n-2i+3}'(x_{n-2i+2}) = \\ = \varphi_{n-2i+1}'(x_{n-2i+1}) - \varphi_{n-2i+2}'(x_{n-2i+1}) = A_{2i-2,\, 2i-1}, \ \ i = 2(1)p \\ \varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i) = h, \ i = 2p(1)n - 2p. \end{gathered} \tag{5}$$

Ținînd seama de condițiile (5), (4) devine o formulă de tipul (1), unde

$$R_n[f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

Pentru a fi satisfăcute condițiile (3) și (5) este suficient să luăm funcțiile $\varphi_i(x)$ sub forma

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x - x_0)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - \\ - A_{2,3}(x-x_3)$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\varphi_{2p-1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - \\ - A_{2,3}(x-x_3) - \dots - A_{2p-3,2p-1}(x-x_{2p-2}),$$

$$\varphi_{2p}(x = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - \\ - A_{2,3}(x-x_3) - \dots - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2}) - \\ - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-1}).$$

(6)

$$\varphi_{2p+1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_0) - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - \\ - A_{2,3}(x-x_3) - \dots - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2}) - \\ - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-1}) - h(x-x_{2p})$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\varphi_{n-2p-1}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_n) + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + \\ + A_{2,3}(x-x_{n-2}) + \dots + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+2}) + \\ + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+1}) + h(x-x_{n-2p-1}) + h(x-x_{n-2p})$$

$$\varphi_{n-2p}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_n) + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + \\ + A_{2,3}(x-x_{2-n}) + \dots + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+2}) + \\ + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+1}) + h(x-x_{n-2p})$$

$$\varphi_{n-2p+1}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_n) + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + \\ + A_{2,3}(x-x_{n-2}) + \dots + A_{2p-2,2p+1}(x-x_{n-2p+2}) + \\ + A_{2p-2,2p+1}(x-x_{n-2p+1})$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_n) + A_{0,1}(x-x_{n-1})$$

$$\varphi_n(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_n).$$

Pentru rest obținem evaluarea

$$(7)\qquad |R_n[f]| \leqslant M\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\mathrm{d}x.$$

Din faptul că formula de cuadratură are gradul de exactitate egal cu unu, rezultă

$$\sum_{i=1}^{p} A_{2i-2,\,2i-1} = \frac{(4p-1)h}{4}.$$

Pentru determinarea celor p coeficienți mai sînt ncesare $(p-1)$ relații ce se obțin punînd condiția ca integrala

$$I = \int_{x_0}^{x_n} |\varphi\,(x)|\,\mathrm{d}x$$

se ia valoarea minimă.

Avem

$$(8)\qquad I = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi_i(x)|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

unde

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi_i\,(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (i = 1(1)n).$$

LEMA. Minimul integralei

$$G(A,\,B) = \int_{a-h}^{a+h}\left|\frac{x^2}{2} - Ax - B\right|\mathrm{d}x \qquad (h > 0)$$

pe mulțimea polinoamelor $\frac{x^2}{2} - Ax - B$ *de gradul al doilea cu coeficientul lui* x^2 *egal cu* $\frac{1}{2}$ *și coeficienții* A *și* B *arbitrari, este atins pentru polinomul unic* $T_2(x) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right)$.

Demonstrații ale acestei leme se găsesc în lucrările [1], [2].

Conform lemei, integrala I_i $(i - 4(1)2p)$ ia valoarea minimă în cazul în care φ_i $(i = 4(1)2p)$ coincide pe intervalul corespunzător $[x_{i-1},\, x_i]$ $(i = 4(1)2p)$ cu polinomul care se abate cel mai puțin de la zero pe acest interval. Pentru aceasta trebuie să avem

$$x_0 + 2[A_{0,1} + A_{2,3} + \ldots + A_{2i-4,\,2i-3}] + A_{2i-2,\,2i-1} =$$

$$= \frac{x_{2i-2} + x_{2i-1}}{2}\;(i = 3(1)p)$$

$$x_0 + 2[A_{0,1} + A_{2,3} + \dots + A_{2i-2,\,2i-1}] = \frac{x_{2i-1} + x_{2i}}{2} \qquad (i = 2(1)p)$$

$$\frac{x_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} A_{2k-2,\,2k-1}(x_{2k-2} + x_{2k-1}) + A_{2i-2,\,2i-1}x_{2i-2} =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{x_{2i-1} - x_{2i-1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_{2i-1} + x_{2i-2}}{2}\right)^2 \qquad i = (3(1)p)$$

$$\frac{x_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{i} A_{2k-2,\,2k-1}(x_{2k-2} + x_{2k-1}) = -\frac{1}{8}\left(\frac{x_{2i} - x_{2i-1}}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x_{2i} + x_{2i-1}}{2}\right)^2, \qquad i = 2(1)p),$$

relații ce se mai scriu sub forma

$$2\sum_{k=1}^{i-1} A_{2k-2,\,2k-1} + A_{2i-2,\,2i-1} = \frac{(4i-3)h}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{i} A_{2k-2,\,2k-1} = \frac{(4i-1)h}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{i-1}(4k-3)\,A_{2k-2,\,2k-1} + (2i-2)\,A_{2i-2,\,2i-1} = \frac{32i(2i-3)+35}{32}h$$

$$\sum_{k=1}^{i}(4k-3)\;A_{2k-2,\,2k-1} = \frac{32i(2i-1)+3}{32}h$$

Din aceste relații obținem

$$A_{0,1} = \frac{85h}{128}, \quad A_{2,3} = \frac{139}{128}h, \; A_{4,5} = \dots = A_{2p-2,\,2p-1} = h. \tag{9}$$

Se observă că pentru valorile (9) ale parametrilor $A_{2i-2,\,2i-1}$ și integralele I_{2p+1}, $I_{2p-2}, \dots$ iau valoarea minimă.

Utilizînd valorile (9), pentru integralele $I_i(i-1(1)n)$ obținem

$$I_1 = \frac{127}{768}h^3,$$

$$I_2 = \frac{-11891 + 1785\sqrt{1785}}{393216}h^3$$

$$I_3 = \frac{35}{768}h^3 \tag{10}$$

$$I_4 = I_5 = \dots = I_{n-3} = \frac{h^3}{32},$$

$$I_{n-2} = I_3, \;\; I_{n-1} = I_2, \;\; I_n = I_1.$$

Inlocuind valorile (10) în (8) rezultă

$$I = 2(I_1 + I_2 + I_3) + (n-6)I_4 = \left(\frac{29069 + 1785\sqrt{1785}}{196608} + \frac{n}{32}\right)h^3$$

Prin urmare

$$|R_n[f]| \leqslant \left(\frac{29069 + 1785\sqrt{1785}}{196608} + \frac{n}{32}\right) h^3 M, \tag{11}$$

pentru $p > 1$.
Pentru $p = 1$ se obține formula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4} h\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)] + \tag{12}$$
$$+ h[f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-2})] + R_n[f],$$

unde

$$|R_n[f]| \leqslant \frac{4n+3}{12} h^3 M. \tag{13}$$

Din cele demonstrate mai sus rezultă teorema

TEOREMA 1. *Formula de cuadratură de tipul (1), avînd gradul de exactitate egal cu unu, pentru care evaluarea restului (7) are cea mai mică valoare este*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{85h}{128}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)] + \tag{14}$$
$$+ \frac{139h}{128}[f(x_2) + f(x_3) + f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] +$$
$$+ h[f(x_4) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-4})] + R_n[f],$$

cu evaluarea restului dată de (11), pentru $p > 1$, și formula (12) cu evaluarea restului dată de (13) pentru $p = 1$.

2. În continuare vom trata formula (1) de tip deschis, adică de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = A_{0,1}[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \tag{15}$$
$$+ A_{2,3}[f(x_2) + f(x_3) + f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] +$$
$$+ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad +$$
$$+ A_{2p-2,2p-1}[f(x_{2p-2}) + f(x_{2p-1}) + f(x_{n-2p+1}) + f(x_{n-2p+2})] +$$
$$+ h[f(x_{2p}) + f(x_{2p+1}) + \ldots + f(x_{n-2p})] + R[f]$$

unde $f \in W^{(2)}(M;\ x_0,\ x_n)$.

Procedînd analog ca în prima parte, obținem

$$|R_n[f]| \leqslant M \int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\mathrm{d}x, \tag{16}$$

unde funcţia coincide pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, (1)n)$ cu funcţiile

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - A_{2,3}(x-x_3)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\varphi_{2p-1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - A_{2,3}(x-x_3) - \ldots -$$
$$- A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2})$$

$$\varphi_{2p}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - A_{2,3}(x-x_3) - \ldots -$$
$$- A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2}) - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-1})$$

$$\varphi_{2p+1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - A_{2,3}(x-x_3) - \ldots -$$
$$- A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2}) - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-1}) - h(x-x_{2p}) \tag{17}$$

$$\varphi_{2p+2}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_{0,1}(x-x_1) - A_{2,3}(x-x_2) - A_{2,3}(x-x_3) - \ldots -$$
$$- A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-2}) - A_{2p-2,2p-1}(x-x_{2p-1}) -$$
$$- h(x-x_{2p}) - h(x-x_{2p+1})$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-2p-1}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + A_{2,3}(x-x_{n-2}) + A_{2,3}(x-x_{n-3}) +$$
$$+ \ldots + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+2}) + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+1}) +$$
$$+ h(x-x_{n-2p}) + h(x-x_{n-2p-1})$$

$$\varphi_{n-2p}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + A_{2,3}(x-x_{n-2}) + A_{2,3}(x-x_{n-3}) +$$
$$+ \ldots + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+2}) + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+1}) +$$
$$+ h(x-x_{n-2p})$$

$$\varphi_{n-2p+1}(x) = \frac{(x-x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x-x_{n-1}) + A_{2,3}(x-x_{n-2}) +$$
$$+ A_{2,3}(x-x_{n-3}) + \ldots + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+2}) + A_{2p-2,2p-1}(x-x_{n-2p+1})$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-3}(x) = \frac{(x - x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x - x_{n-1}) + A_{2,3}(x - x_{n-2}) + A_{2,3}(x - x_{n-3})$$

$$\varphi_{n-2}(x) = \frac{(x - x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x - x_{n-1}) + A_{2,3}(x - x_{n-2})$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \frac{(x - x_n)^2}{2} + A_{0,1}(x - x_{n-1})$$

$$\varphi_n(x) = \frac{(x - x_n)^2}{2}$$

Analog se deduce şi următoarea teoremă

TEOREMA 2. *Formula de cuadratură de tipul (15), avînd gradul de exactitate egal cu unu, pentru care evaluarea restului (16) are cea mai mică valoare este*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{17h}{16}\left[f(x_1) + f(x_{n-1})\right] + \frac{39h}{32}\left[f(x_2) + f(x_3) + f(x_{n-3}) + f(x_{n-2}\right] +$$

$$+ h\left[f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-4})\right] + R_n[f], \tag{18}$$

unde

$$|R_n[f]| \leqslant \frac{(-279 + 103n)\,h}{96}, \qquad \textit{pentru } p > 1 \tag{19}$$

şi

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3h}{2} f(x_1) + f(x_{n-1})] + h[f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2})] + R_n[f], \tag{20}$$

iar

$$|R_n[f]| \leqslant \frac{5n - 6}{12} h^3 M. \tag{21}$$

pentru $p = 1$.

Observaţia 1. Formula (20) este dată şi în [2].

Observaţia 2. Formulele de tipul (1) au avantajul, faţă de formulele studiate în lucrările [3], [4], [5], [6], că numărul coeficienţilor diferiţi este mai mic.

BIBLIOGRAFIE

1. Nikolski S. M., *Kvadraturnie formuli*, Moskva, 1958.
2. Coman, Gh., *Formule practice de cuadratură, optimale pentru o clasă de funcţii*, Studia Univ. Babeş—Bolyai Ser. Math.—Mech., fasc. 1, 1971, 73—79.
3. Ionescu D. V., *Construirea unor formule practice de cuadratură*. ST. CERC. MATEM., TOM 15, Nr. 6, 1963. 757—769.
4. Ionescu D. V., *Cîteva formule practice de cuadratură*, Comunicările Acad. R.S.R., 13, 8, 1963, 689—695.

5. I o n e s c u D. V., *Nouvelles formules practiques de quadrature*, C. R. Acad. Sci., Paris, 259, 1964, 504—507.
6. M i n e u r H., *Techniques de calcul numérique*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952.
7. I o n e s c u D. V., *Cuadraturi numerice*, București, 1957.

PRACTICAL FORMULA OF OPTIMAL QUADRATURE FOR A CLASS OF FUNCTIONS

(S u m m a r y)

Quadrature formula of the type (1) and (15) where $f \subset W^1(M; x_0, x_n)$ are constructed with the assumption that the degree of exactitude equals 1 and arbitraty p, for which, the evaluation of the rest (7) respectivaly (16) take the minimum value.

The formula (14) is obtained with the evaluation (11) of the rest for $p > 1$ and the formula (12) with the evaluation of the rest (13) for $p = 1$ respectively the formula (18) with the evaluation (19) of the rest for $p > 1$ and the formula (20) with evaluation of the rest (21), for $p = 1$.