APROXIMAREA SOLUȚIEI UNUI SISTEM DE ECUAȚII INTEGRO DIFERENȚIALE DE TIP VOLTERRA

de

IULIAN COROIAN

1. Vom deduce, aşa cum am făcut în [1] pentru cazul unei ecuaţii integro-diferenţiale, formule de tip Runge-Kutta, pentru integrarea numerică a unui sistem de două ecuaţii integro-diferenţiale nelineare Volterra, de forma

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
y'(x) &= F\left(x, y(x), z(x), \int_{x_0}^{x} f(x, t, y(t), z(t))\mathrm{d}t\right),\\
z'(x) &= G\left(x, y(x), z(x), \int_{x_0}^{x} g(x, t, y(t), z(t))\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}
$$

În cazul unei singure ecuaţii integro-diferenţiale s-au obţinut formule de tip Runge-Kutta în [2], chiar pentru o ecuaţie integro-diferenţială care conţine derivata de ordinul p.

În cele ce urmează vom presupune că sistemul (1) admite o soluţie formată din perechea de funcţii reale $y(x)$ şi $z(x)$, continue, avînd derivate pînă la un ordin dorit pentru $x \in [x_0, a]$ şi care verifică condiţiile $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

Mai presupunem că funcţiile reale $F(x, y(x), z(x), u(x))$ şi $G(x, y(x), z(x), v(x))$, unde am notat

$$
u(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, t, y(t), z(t))\mathrm{d}t, \quad v(x) = \int_{x_0}^{x} g(x, t, y(t), z(t))\mathrm{d}t,
$$

sînt funcţii care admit derivate parţiale continue în raport cu fiecare argument, pînă la un ordin dorit şi sînt continue în domeniul dat de inegalităţile

$$
x_0 \leqslant x \leqslant a, \quad |y| < +\infty, \quad |z| < +\infty, \quad |u| < +\infty, \quad |v| < +\infty,
$$

iar $f(x, t, y, z)$ şi $g(x, t\, y, z)$ sînt continue cu derivate parţiale continue pînă la un ordin dorit, în domeniul

$$
x_0 \leqslant x \leqslant a, \; x_0 \leqslant t \leqslant a, \; |y| < +\infty, \; |z| < +\infty.
$$

2. Formulele noastre vor avea ordinul de exactitate $O(h^4)$, unde $h = x - x_0$, adică desvoltările în serie Taylor după puterile lui h a soluţiei exacte $y(x)$, $z(x)$ a sistemului (1) şi a soluţiei aproximative $\bar{y}(x)$, $\bar{z}(x)$, vor coincide pînă la termenii în h^3 inclusiv.

Dezvoltările în serie Taylor a soluţiei exacte sînt

$$
\begin{aligned}
&y(x_0+h) = y_0 + \frac{1}{1!}y'(x_0)h + \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_0)h^3 + O(h^4),\\
(2)\qquad &\\
&(x_0+h) = z_0 + \frac{1}{1!}z'(x_0)h + \frac{1}{2!}z''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}z'''(x_0)h^3 + O(h^4),
\end{aligned}
$$

în care derivatele au, cum se poate vedea uşor, expresiile

$$
\begin{aligned}
y'(x_0) &= F(x_0, y_0, z_0, u) = F_0,\\
y''(x_0) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 f_0,\\
y'''(x_0) &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 F_0^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 G_0^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 f_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_0 F_0 +\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)_0 G_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u}\right)_0 f_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\right)_0 F_0G_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial u}\right)_0 F_0f_0 +\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial z}\right)_0 G_0f_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 f_0\right] +\\
&\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0 g_0\right] +\\
&\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 G_0\right],\\
(3)\qquad &\\
z'(x_0) &= G(x_0, I_0, z_0, v) = G_0,\\
z''(x_0) &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0 g_0,\\
z'''(x_0) &= \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_0 F_0^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_0 G_0^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)_0 g_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right)_0 F_0 +\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial z}\right)_0 G_0 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial v}\right)_0 g_0 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial z}\right)_0 F_0G_0 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial v}\right)_0 F_0g_0 +\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial v}\right)_0 G_0g_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 f_0\right] +\\
&\quad + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0 g_0\right] +\\
&\quad + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0\left[2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 G_0\right].
\end{aligned}
$$

În aceste egalităţi indicele zero arată că funcţiile respective sînt calculate în punctul $x = x_0$, $t = x_0$.

Aşa cum prima dată a făcut C. Runge, [3] în cazul integrării numerice a ecuaţiilor diferenţiale, vom considera soluţia aproximativă a sistemului (1) în punctul $x_0 + h$, sub forma

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}(x_0+h) = y_0 + a_1k_1 + a_2k_2,\\
(4)\qquad &\\
&\bar{z}(x_0+h) = z_0 + a_1l_1 + a_2l_2,
\end{aligned}
$$

unde am notat

$$
\begin{aligned}
& k_1 = hF(x_0 + \alpha_1 h,\ y_0,\ z_0,\ 0), \quad l_1 = hG(x_0 + \alpha_1 h,\ y_0,\ z_0,\ 0),\\
& k_2 = hF(x_0 + \alpha_2 h,\ y_0 + \beta_1 k_1 + \beta_2 l_1,\ z_0 + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 l_1,\ \delta_1 k),\\
(5) \quad & l_2 = hG(x_0 + \alpha_2 h,\ y_0 + \beta_1 k_1 + \beta_2 l_1,\ z_0 + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 l_1,\ \delta_1 l),\\
& k = hf(x_0 + \alpha h,\ x_0 + \beta h,\ y_0 + \gamma k_1 + \delta l_1,\ z_0 + \gamma' k_1 + \delta' l_1),\\
& l = hg(x_0 + \alpha h,\ x_0 + \beta h,\ y_0 + \gamma k_1 + \delta l_1,\ z_0 + \gamma' k_1 + \delta' l_1),
\end{aligned}
$$

a_i, α_i, β_i, γ_i, $i = 1,2$ și α, β, γ, δ, γ', δ', δ_1, fiind niște constante reale ce urmează a fi determinate așa ca

$$
y(x_0 + h) - \bar{y}(x_0 + h) = O(h^4), \quad z(x_0 + h) - \bar{z}(x_0 + h) = O(h^4).
$$

Desvoltînd în serie Taylor după puterile lui h funcțiile k_1, l_1, k_2, l_2, k, l și înlocuind aceste desvoltări în (4) se obțin desvoltările în serie Taylor a soluției aproximative $\bar{y}(x_0 + h)$, $\bar{z}(x_0 + h)$.

Vom scrie direct desvoltările lui $\bar{y}$ și $\bar{z}$, în care vom presupune de la bun început că $F_0 = G_0$.

$$
\begin{aligned}
\bar{y}(x_0 + h) = {} & y_0 + (a_1 + a_2) F_0 h + \Big\{(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + a(\beta_1 + \beta_2)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 F_0 +\\
& + a_2(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 F_0 + a_2\delta_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 f_0\Big\} h^2 + \Big\{\frac{1}{2}(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 +\\
& + \frac{1}{2} a_2(\beta_1 + \beta_2)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 F_0^2 + \frac{1}{2} a_2(\gamma_1 + \gamma_2)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) F_0^2 + \frac{1}{2} a_2\delta_1^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 f_0^2 +\\
& + a_2\alpha_2(\beta_1 + \beta_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_0 F_0 + a_2\alpha_2(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)_0 F_0 + a_2\alpha_2\delta_1\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u}\right)_0 f_0 +\\
& + a_2(\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\right)_0 F_0^2 + a_2\delta_1(\beta_1 + \beta_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial u}\right)_0 F_0 f_0 +\\
(6) \quad & + a_2\delta_1(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial u}\right)_0 F_0 f_0 + a_2\alpha_1\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left[\beta_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \beta_2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0\right] +\\
& + a_2\alpha_1\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left[\gamma_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \gamma_2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0\right] + a_2\delta_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0\Big[\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 +\\
& + \beta\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 + (\gamma + \delta)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 F_0 + (\gamma' + \delta')\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 F_0\Big]\Big\} h^3 + O(h^4).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{z}(x_0 + h) = {} & z_0 + (a_1 + a_2) F_0 h + \Big\{(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + a_2(\beta_1 + \beta_2)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 F_0 +\\
& + a_2(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 F_0 + a_2\delta_1\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0 g_0\Big\} h^2 + \Big\{\frac{1}{2}(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_0 +\\
(7) \quad & + \frac{1}{2} a_2(\beta_1 + \beta_2)^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_0 F_0^2 + \frac{1}{2} a_2(\gamma_1 + \gamma_2)^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_0 F_0^2 + \frac{1}{2} a_2\delta_1^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)_0 g_0^2 +\\
& + a_2(\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial z}\right)_0 F_0^2 + a_2\delta_1(\beta_1 + \beta_2)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial v}\right)_0 F_0 g_0 +
\end{aligned}
$$

$$+ a_2\delta_1(\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial v}\right)_0 F_0 g_0 + a_2\alpha_1\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0\left[\beta_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\beta_2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0\right]+$$

$$+ a_2\alpha_1\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0\left[\gamma_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\gamma_2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0\right] + a_2\delta_1\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0\left[\alpha\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 +\right.$$

$$\left.+\beta\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_0+(\gamma+\delta)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 F_0+(\gamma'+\delta')\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 F_0\right]\Bigg\} h^3 + O(h^4).$$

3. Comparînd desvoltările (6) și (7) cu cele ale soluției exacte (2), în care folosim expresiile derivatelor (3), ajungem la

TEOREMA. *Dacă avem satisfăcute condițiile*

(8) $$F_0 = G_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

atunci pentru soluția sistemului (1) există o clasă de formule de tip Runge-Kutta de forma (4), (5) cu ordinul de exactitate $O(h^4)$ și anume parametri din (4), (5) luînd valorile

(9) $$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = \frac{3}{4},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \frac{2}{3},\ \alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{3},\ \delta_1 = \frac{2}{3},$$

$\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma, \delta, \gamma', \delta'$ *arbitrari, satisfăcînd condițiile*

$$\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2=\frac{2}{3},\ \gamma+\delta=\gamma'+\delta'=\frac{1}{3},$$

iar dacă (8) nu este satisfăcută atunci nu există formule de forma (4), (5) cu ordinul de exactitate $O(h^4)$.

Demonstrație. a) În ipotezele noastre (8) se constată că desvoltările (6) și (7) ale soluției exacte conțin aceiași termeni ca și desvoltările (2) ale soluției aproximative și atunci identificînd coeficienții desvoltărilor se obține sistemul de ecuații algebrice satisfăcut de parametri

(10) $$\begin{aligned}
&a_1+a_2=1, && a_2\alpha_2\delta_1=\frac{1}{3},\\
&a_1\alpha_1+a_2\alpha_2=\frac{1}{2}, && a_2(\beta_1+\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)=\frac{1}{3},\\
&a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2=\frac{1}{3}, && a_2\delta_1(\beta_1+\beta_2)=\frac{1}{3},\\
&a_2\delta_1=\frac{1}{2}, && a_2\delta_1(\gamma_1+\gamma_2)=\frac{1}{3},\\
&a_2(\beta_1+\beta_2)^2=\frac{1}{3}, && a_2\alpha\delta_1=\frac{1}{3},\\
&a_2(\gamma_1+\gamma_2)^2=\frac{1}{3}, && a_2\beta\delta_1=\frac{1}{6},\\
&a_2\delta_1^2=\frac{1}{3}, && a_2\delta_1(\gamma+\delta)=\frac{1}{6},\\
&a_2\alpha_2(\beta_1+\beta_2)=\frac{1}{3}, && a_2\delta_1(\gamma'+\delta')=\frac{1}{6},\\
&a_2\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)=\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

Acest sistem de ecuaţii se rezolvă destul de uşor şi se ajunge astfel la prima concluzie a teoremei.

b) Dezvoltările (6), (7) pot fi făcute să conţină aceiaşi termeni ca şi dezvoltările corespunzătoare ale soluţiei exacte (2) şi în alte condiţii decît (8).

Să presupunem acum că $F_0 = G_0$, că cel puţin una dintre derivatele parţiale din (8) este diferită de zero şi că în schimb avem

$$\text{(11)}\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 G_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 f_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 F_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_0 g_0 = 0.$$

În aceste condiţii dezvoltările (6), (7) vor coincide pînă la termenii în h^3 inclusiv, cu dezvoltările (2) dacă parametri vor satisface următorul sistem de ecuaţii

$(A_1)\quad a_1 + a_2 = 1,$ $\qquad (A_2)\quad a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = \frac{1}{2},$

$(A_3)\quad a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 = \frac{1}{3},$ $\qquad (A_4)\quad a_2(\beta_1 + \beta_2 - \delta_1) = 0,$

$(A_5)\quad a_2(\gamma_1 + \gamma_2 - \delta_1) = 0,$ $\qquad (A_6)\quad a_2(\beta_1 + \beta_2)^2 = \frac{1}{3},$

$(A_7)\quad a_2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \frac{1}{3},$ $\qquad (A_8)\quad a_2\delta_1^2 = \frac{1}{3},$

$(A_9)\quad a_2\alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = \frac{1}{3},$ $\qquad (A_{10})\quad a_2\alpha_2\delta_1 = \frac{1}{3},$

$(A_{11})\quad a_2(\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{3},$ $\qquad (A_{12})\quad a_2\delta_1(\beta_1 + \beta_2) = \frac{1}{3},$

$(A_{13})\quad a_2\delta_1(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{3},$ $\qquad (A_{14})\quad a_2\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{6},$

$(A_{15})\quad a_2\alpha_1\beta_2 = 0,$ $\qquad (A_{16})\quad a_2\alpha_1\gamma_1 = 0,$

$(A_{17})\quad a_2\alpha_1\gamma_2 = \frac{1}{6},$ $\qquad (A_{18})\quad a_2\alpha\delta_1 = \frac{1}{3},$

$(A_{19})\quad a_2\beta\delta_1 = \frac{1}{6},$ $\qquad (A_{20})\quad a_2\delta_1(\gamma + \delta) = \frac{1}{6},$

$(A_{21})\quad a_2\delta_1(\gamma' + \delta') = \frac{1}{6}.$

Printr-un raţionament destul de simplu se ajunge la concluzia că acest sistem de ecuaţii nu admite soluţie reală.

Intr-adevăr din ecuaţiile (A_{15}) şi (A_{16}) deducem că $\beta_2 = \gamma_1 = 0$, deoarece $a_2 \neq 0$ şi $\alpha_1 \neq 0$, altfel n-ar putea fi satisfăcute restul ecuaţiilor. Din (A_6) (A_7) şi (A_8) obţinem atunci $\beta_1 = \gamma_2 = \delta_1$ iar din (A_{17}), (A_{18}), (A_{19}), (A_{20}) şi (A_{21}) urmează că

$$\gamma + \delta = \gamma' + \delta' = \alpha_1 = \beta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Apoi din (A_{10}) şi (A_{18}) rezultă că $\alpha_2 = \alpha = 2\alpha_1$, iar ecuaţiile (A_1) şi (A_2) rezolvate în raport cu a_1 şi a_2 ne dau atunci

$$a_1 = 2 - \frac{1}{\alpha}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha} - 1,$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (A_3) obţinem ecuaţia

$$6\alpha^2 - 9\alpha + 4 = 0,$$

care nu are rădăcini reale şi deci nu există formule de forma (4), (5) cu ordinul de exactitate $O(h^4)$.

c) Dacă în sfîrşit nici condiţiile (8), nici (11) nu sînt satisfăcute atunci desvoltările (6) şi (7) ale soluţiei aproximative nu conţin aceiaşi termeni ca şi dezvoltările (2) ale soluţiei exacte şi deci nu există formule de forma (4), (5) cu ordinul de exactitate $O(h^4)$ pentru sistemul (1).
Astfel teorema este complet demonstrată.

Aşadar în condiţiile (8), luînd pentru acei parametri care pot fi arbitrari, de exemplu valorile $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{3}$, $\gamma = \gamma' = \frac{1}{3}$, $\delta = \delta' = 0$, avem următoarele formule simple de tip Runge-Kutta cu ordinul de exactitate $O(h^4)$, pentru sistemul (1)

$$(12)\quad \bar{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_2, \qquad \bar{z}(x_0 + h) = z_0 + \frac{1}{4} l_1 + \frac{3}{4} l_2,$$

unde

$$\begin{aligned}
&k_1 = hF(x_0, y_0, z_0, 0) = l_1 = hG(x_0, y_0, z_0, 0),\\
&k_2 = hF\left(x_0 + \frac{2}{3} h,\ y_0 + \frac{2}{3} k_1,\ z_0 + \frac{2}{3} k_1,\ \frac{2}{3} k\right),\\
(13)\quad &l_2 = hG\left(x_0 + \frac{2}{3} h,\ y_0 + \frac{2}{3} l_1,\ z_0 + \frac{2}{3} l_1,\ \frac{2}{3} 1\right),\\
&k = hf\left(x_0 + \frac{2}{3} h,\ x_0 + \frac{1}{3} h\ \ y_0 + \frac{1}{3} k_1,\ z_0 + \frac{1}{3} k_1\right),\\
&1 = hg\left(x_0 + \frac{2}{3} h,\ x_0 + \frac{1}{3} h,\ y_0 + \frac{1}{3} k_1,\ z_0 + \frac{1}{3} k_1\right).
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Coroian, I. : *Formule de tip Runge-Kutta pentru ecuaţia integro-diferenţială Volterra* Studii şi cercetări mat., 4. 26, 1974.
2. Pouzet, Piérre: *Integration numérique des équations integro-différentielles, du type Volterra*, C. r. Acad. Sci., 250, nr. 20, 3269–3270, 1960.
3. Runge, C. : Math. Ann., 46, 167–178, 1895.

APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRO–DIFFERENTIAL SYSTEM OF VOLTERRA TYPE

(Abstract)

The nonlinear integro-differential system of Volterra type (1) is considered and under hypotheses (8) a class of Runge-Kutta type formulas of the form (4), (5), of order $0(h^4)$ for system (1) is derived.