# ASUPRA REDUCERII n-SEMIGRUPURILOR LA BISEMIGRUPURI

de

MARIA S. POP

Perechea $(A, o)$ unde $A$ este o mulţime, aplicaţia $o : A^n \to A$ este o operaţie n-ară asociativă, adică $\forall a_i \in A ; i = 1, \ldots, 2n-1$ şi $k = 1, \ldots, n$ avem

$$((a_1, \ldots, a_n)_0, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})_0 =$$
$$= (a_1, \ldots, a_{k-1}, (a_k, \ldots, a_{k+n-1})_0, a_{k+n}, \ldots, a_{2n-1})_0,$$

se numeşte n-semigrup.

Cercetările cu privire la reducerea unui n-semigrup $(A, o)$ la un semigrup pot fi grupate în două direcţii :

1. Construirea pe o mulţime extinsă a lui $A$ a unui semigrup înfăşurător $(S, .)$, unde $(S, .)$ este semigrupul a cărei mulţime generatoare este $A$ şi $\forall a_i \in A ; i = 1, \ldots, n$, avem $(a_1, \ldots, a_n)_0 = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Astfel de rezultate [1], [5] reprezintă generalizări ale teoremei lui Post ([3] p. 218) cu privire la reducerea n-grupurilor la bigrupuri ;

2. Construirea unui semigrup pe mulţimea $A$ astfel ca produsul n-ar să poată fi obţinut cu ajutorul operaţiei binare de semigrup şi al unui endomorfism al său. Cercetările în această direcţie se referă la o clasă mai restrînsă de n-semigrupuri şi anume cele care admit o unitate laterală [6]. Ele reprezintă generalizări ale teoremei lui Hoszú [2] referitoare la reducerea n-grupurilor la bigrupuri.

În lucrare studiem legătura dintre cele două modalităţi de reducere a unui n-semigrup la un semigrup în clasa n-semigrupurilor care posedă o unitate laterală.

**DEFINIŢIE.** Fie $(A, o)$ un n-grupoid şi $u_1, \ldots, u_{n-2} \in A$, $n-2$ elemente fixe din $A$. Perechea $(A, \cdot)$ unde „$\cdot$" este o operaţie binară definită pe $A$ prin

$$\forall x, y \in A ; x \cdot y = (x, u_1, \ldots, u_{n-2}, y)_0,$$

se numeşte reducerea binară a lui $A$ în raport cu $u_1, \ldots, u_{n-2}$. Notăm $red_{u_1 \ldots u_{n-2}} A = (A, \cdot)$.

Are loc

TEOREMA 1. Dacă $(A, o)$ este un n-grupoid semiasociativ, adică $\forall a_i \in A$; $i = 1, \ldots, 2n-1$,

$$((a_1, \ldots, a_n)_0, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})_0 = (a_1, \ldots, a_{n-1}, (a_n, \ldots, a_{2n-1})_0)_0$$

și $u_1, \ldots, u_{n-2} \in \mathbf{A}$, atunci $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$ este bisemigrup. Dacă $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ este o unitate la dreapta în $(A, o)$, atunci $u_{n-1}$ este unitate la dreapta în $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$.

Dacă $(A, o)$ este un n-grup, atunci $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$ este grup și $\forall c \in A$ avem $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A \simeq \mathrm{red}_{c \ldots c} A$.

Demonstrație. Prima parte a teoremei este imediată. Vom demonstra că reducerea binară în raport cu $n-2$ elemente fixe ale unui n-grup este izomorfă cu reducerea binară a lui în raport cu orice element al său. Fie „o" operația binară definită în $\mathrm{red}_{c \ldots c} A$. Aplicația $f : \mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A \to \mathrm{red}_{c \ldots c} A$; $f(x) = (c, u_1, \ldots, u_{n-2}, x)_0$ este un omomorfism. Dacă $f(x) = f(y)$, adică $(c, u_1, \ldots, u_{n-2}, x)_0 = (c, u_1, \ldots, u_{n-2}, y)_0$, atunci $c \cdot x = c \cdot y$, de unde $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$ fiind grup, rezultă $x = y$ și prin urmare omomorfismul $f$ este injectiv.

Pentru $\forall y \in \mathrm{red}_{c \ldots c} A$ ecuația $(c, u_1, \ldots, u_{n-2}, x)_0 = y$ are soluție unică în $(A, o)$, deci există $x \in A$ astfel ca $f(x) = y$ și $f$ este surjecție. Am demonstrat astfel că $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A \simeq \mathrm{red}_{c \ldots c} A$. În continuare vom nota $\mathrm{red}_{c \ldots c} A$ mai simplu prin $\mathrm{red}_c A$.

TEOREMA 2. Dacă $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ este o unitate la dreapta în n-semigrupul $(A, o)$

$$\rho = \{((a_1, \ldots, a_i), (a'_1, \ldots, a'_i)) \in A^i \times A^i / (u_1, \ldots, u_{n-1}, a_1, \ldots, a_i)_0 = (u_1, \ldots, u_{n-1}, a'_1, \ldots, a'_i)_0;\ i = 1, \ldots, n-1\},$$

atunci:

1) $\rho$ este o congruență asociativă în $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^i$;

2) $G/\rho$ este un semigrup cu unitate;

3) $A_0 = A_{n-1}/\rho$ este subsemigrup al lui $G/\rho$.

Vom numi $A_0$, bisemigrupul asociat de congruența $\rho$ n-semigrupului $(A, o)$.

Demonstrație. Fie relația $\tau$ definită în $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^i$ prin:

$$\tau = \{((a_1, \ldots, a_i), (a'_1, \ldots, a'_i)) \in A^i \times A^i / (x_1, \ldots, x_{n-i}, a_1, \ldots, a_i)_0 = (x_1, \ldots, x_{n-i}, a'_1, \ldots a'_i)_0;\ \forall x_1, \ldots, x_{n-i} \in A;\ i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Se demonstrează că $\rho = \tau$. Din definiție rezultă că $\rho$ este o relație de echivalență. Ea este compatibilă cu operația binară definită în G:

$$(x_1, \ldots, x_i)(y_1, \ldots, y_j) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j) & \text{dacă } i + j < n \\ (x_1, \ldots, x_{i+j-n}(\ldots, y_j)_0) & \text{dacă } i + j \geqslant n, \end{cases}$$

Aceasta demonstrează că $\rho$ este o congruență pe G. Vom nota prin $[a_1, \ldots, a_i]$ clasa de congruență modulo $\rho$ cu reprezentantul $(a_1, \ldots, a_i) \in G$. Operația binară definită în G definește o operație binară $*$ în $A^* = G/\rho$. Pentru orice $[a_1, \ldots, a_i]$, $[b_1, \ldots, b_j]$, $[c_1, \ldots, c_k] \in A^*$, utilizînd convenabil condițiile din ipoteză, observația că $\rho = \tau$, se demonstrează că

$([a_1, \ldots, a_i] * [b_1, \ldots, b_j]) * [c_1, \ldots, c_k] = [a_1, \ldots, a_i] * ([b_1, \ldots, b_j] * [c_1, \ldots, c_k])$. De aici rezultă că $(A^*, *)$ este un semigrup. Elementul $[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ este unitate la dreapta în $(A^*, *)$. Totodată $\forall x \in A$ avem:

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, x)_0 = (u_1, \ldots, u_{n-1}, (u_1, \ldots, u_{n-1}, x)_0)_0,$$

ceea ce demonstrează că

$$[x] = [(u_1, \ldots, u_{n-1}, x)_0] = [u_1, \ldots, u_{n-1}] * [x].$$

De aici rezultă că $[u_1, \ldots, u_{n-1}] * [a_1, \ldots, a_i] = [a_1, \ldots, a_i]$, adică elementul $[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ este unitate atît la stînga cît și la dreapta în A. Cum oricare ar fi o altă unitate la dreapta $(u'_1, \ldots, u'_{n-1})$ în $(A, o)$, $[u'_1, \ldots, u'_{n-1}]$ este unitate în $A^*$ și un semigrup are o singură unitate, urmează că $[u_1, \ldots, u'_{n-1}] = [u'_1, \ldots, u_{n-1}]$.

Fie $A_0 = A^{n-1}/\rho$. Dacă $[a_1, \ldots, a_{n-1}]$, $[b_1, \ldots, b_{n-1}] \in A_0$, atunci $[a_1, \ldots, a_{n-1}] * [b_1, \ldots, b_{n-1}] = [a_1, \ldots, a_{n-2}, (a_{n-1}, \ldots, b_{n-1})_0] \in A_0$.

Submulțimea $A_0$ fiind închisă față de operația $*$ rezultă că $A_0$ este subsemigrup al lui A și are unitatea $[u_1, \ldots, u_{n-1}]$.

TEOREMA 3. Dacă $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ este o unitate la dreapta în n-semigrupul $(A, o)$ și $A_0$ este bisemigrupul definit în teorema 2, atunci $red_{u_1, \ldots, u_{n-2}} A \simeq A_0$ dacă și numai dacă $(u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-2})$ este o unitate la stînga în $(A, o)$.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ este o unitate la dreapta și $(u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-2})$ o unitate la stînga în $(A, o)$ iar $f : red_{u_1 \ldots u_{n-2}} A \to A_0$; $f(x) = [u_1, \ldots, u_{n-2}, x]$, atunci $\forall x, y \in A$ din $[u_1, \ldots, u_{n-2}, x] = [u_1, \ldots, u_{n-2}, y]$ rezultă $(u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-2}, x)_0 = (u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-2}, y)_0$ deci $x = y$ și prin urmare f este o injecție.

Pentru $\forall [a_1, \ldots, a_{n-1}] \in A_0$, cum $(u_{n-1}, a_1, \ldots, a_{n-1})_0 = (u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-1}, (u_{n-2}, a_1, \ldots, a_{n-1})_0)_0$, avem $[a_1, \ldots, a_{n-1}] = [u_1, \ldots, u_{n-2}, (u_{n-1}, a_1, \ldots, a_{n-1})_0] = f((u_{n-1}, a_1, \ldots, a_{n-1})_0)$ și f este o surjecție.

Dacă $x, y \in red_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$, atunci $f(x \cdot y) = [u_1, \ldots, u_{n-2}, (x \cdot y)] = [u_1, \ldots, u_{n-2}, (x, u_1, \ldots, u_{n-2}, y)_0] = [u_1, \ldots, u_{n-2}, x] * [u_1, \ldots, u_{n-2}, y] = f(x) * f(y)$ și f este omomorfism. Am demonstrat astfel că $red_{u_1, \ldots, u_{n-2}} A \simeq A_0$.

Reciproc, dacă $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A \simeq A_0$, cum $A_0$ este semigrup cu unitatea $[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ şi $\mathrm{red}_{u_1 \ldots u_{n-2}} A$ are unitate la dreapta $u_{n-1}$ (conform teoremei 1), rezultă că $u_{n-1}$ este şi unitate la stînga. $\forall x \in A$ avem $x = u_{n-1} \cdot x = (u_{n-1}, u_1, \ldots, u_{n-2}, x)_0$, ceea ce demonstrează că $(u_{n-1}, u_1, \ldots u_{n-2})$ este o unitate la stînga în n-semigrupul $(A, o)$.

Teorema 3 dă o condiţie necesară şi suficientă ca bisemigrupul asociat unui n-semigrup cu unitate la dreapta printr-o construcţie de tip Post să fie izomorf cu bisemigrupul redus în raport cu $n - 2$ elemente fixe.

În clasa n-grupurilor condiţia teoremei 3 fiind satisfăcută (conform teoremei 1) deducem

**COROLAR.** Bigrupurile asociate unui n-grup printr-o construcţie de tip Post şi bigrupurile reduse în raport cu elemente fixe sînt izomorfe.

Acest rezultat generalizează teorema similară obţinută de Timm [4] pentru n-grupurile comutative.

## BIBLIOGRAFIE


1. CUPONA, G., Za asoţijativnite congruenţii, Bull. Soc. Math. Phys., R.P. Macédonie, Skopje, 13, 1962, p. 5–12.
2. HOSZU, M., On the explicit form of n-group operations, Publ., Math. Debrecen, 10, 1963, p. 88–92.
3. POST, E., Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, nr. 2, p. 208–350.
4. TIMM, J., Kommutative n-Gruppen, Dissertation zur Erlangung der Doktorgrades, Hamburg, 1967.
5. TIMM, J., Zur gruppentheoretischen Beschreibung n-stelliger Strukturen, Publ. Math., Debrecen, 17, 1970, p. 183–192.
6. ZUPNIK, D., Polyadic semigroups, Publ. Math., Debrecen, 14, 1967, p. 273–279.



## RÉSUMÉ

On étudie la liaison entre les deux modalités de réduction d'un n-semi-groupe à un bisemi-groupe (voir [1], [5]) respectivement dans la classe des n-semi-groupes qui possèdent une unité latérale. Le théorème 3 donne une condition nécessaire et suffisante pour que le bisemi-groupe associé à un n-semigroupe avec unité à droite par une construction de type Post soit isomorphe avec le bisemigroupe réduit par rapport à $n - 2$ éléments fixes. Comme corollaire, on déduit que les bigroupes associés à un n-groupe par une construction du type Post [3] ainsi que les bigroupes réduits par raport à des éléments fixes [2] sont isomorphes, et ce résultat généralise le théorème similaire obtenu par Timm [4] dans la classe des n-groupes commutatifs.



## REZUMAT

În lucrare se studiază legătura dintre cele două modalităţi de reducere ale unui n-semigrup la un bisemigrup (vezi [1], [5] respectiv [6]) în clasa n-semigrupurilor care posedă o unitate laterală. Teorema 3 dă o condiţie necesară şi suficientă ca bisemigrupul asociat unui n-semigrup cu unitate la dreapta printr-o construcţie de tip Post să fie izomorf cu bisemigrupul redus în raport cu $n - 2$ elemente fixe. Ca un corolar deducem că bigrupurile asociate unui n-grup printr-o construcţie de tip Post [3] şi bigrupurile reduse în raport cu elemente fixe [2] sînt izomorfe, rezultat care generalizează teorema similară obţinută de Timm [4] în clasa n-grupurilor comutative.