# CONSTRUCŢIA METODELOR DE APROXIMARE A RĂDĂCINII UNEI ECUAŢII (II)

de

AUREL GAIDICI

În această parte (II) a prezentei lucrări expunem generalizarea rezultatelor primei părţi (I) (cf. [5]), extinzînd unele metode iterative din cazul real în cel operaţional. Sînt date noi metode iterative modificate pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale în spaţii liniar normate, împreună cu o metodologie de construcţie ale lor.

1. În prima parte (I) a acestei lucrări (cf. [5]), ne-am ocupat de problema construcţiei metodelor de iteraţie (sau MI)) pentru aproximarea unei rădăcini (sau soluţie) a ecuaţiei reale

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

În continuare, şi deci în această parte (II) a lucrării, ne vom ocupa de aceeaşi problemă pentru ecuaţia operaţională

$$P(x) = \theta, \quad x \in X, \tag{1.2}$$

unde P este un operator, în general neliniar, $P : X \to Y$, X şi Y fiind spaţii liniar normate, iar $\theta$ este elementul nul din Y.

Construcţia (MI) pentru cazul ecuaţiei (1.2) este abordată pe două căi şi anume:

1) O anumită (MI) cunoscută (sau construită) pentru ecuaţia (1.1) se transpune pentru ecuaţia (1.2) printr-o transcriere formală, dînd semnificaţii corespunzătoare expresiilor din **R** în X, urmată de o analiza a validităţii lor. Aşa se procedează în lucrările [1], [3], [4], [11] etc; sau

2) se repetă un calcul asemănător celui din cazul real, înlocuind funcţia f prin operatorul P, dreapta reală **R** prin spaţiul X, constantele reale prin anumiţi operatori ce se determină pe baza unor condiţii etc. Cităm în acest sens lucrările [2], [9], [14], [15] etc.

2) Pentru a rezolva prin aproximaţii succesive ecuaţia (1.2) este util să punem în evidenţă un alt operator G în aşa fel incît să fie păstrată echivalenţa

$$P(x) = \theta \Leftrightarrow x - G(x) = \theta, \qquad \forall x \in D,$$

unde $G : D \subset X \to D$, D fiind domeniul ce conţine o soluţie simplă $x^*$ a ecuaţiei (1.2).

Aşadar, inlocuim rezolvarea ecuaţiei (1.2) prin rezolvarea ecuaţiei

(2.1) $$x = G(x), \qquad \forall x \in D,$$

pentru care definim şirul $(x_n)$ deelemente ce aproximează soluţia $x^*$, astfel:

(2.2) $$x_{n+1} = G(x_n), \qquad n \in N$$

unde am notat $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. În acest caz spunem că operatorul $G : D \to D$ este un *operator interativ* ataşat ecuaţiei (1.2), iar relaţia (2.2) o numim *metoda interativă (sau de inerţie)* (cf. 18) şi o notăm simplu prin (MI).

3. În construcţia (MI) ce urmează mai jos, vom urma prima cale menţionată mai înainte şi de aceea ne vom servi de rezultatele primei părţi (I) (cf. [5]).

3.1. *Metoda generalizată a dreptelor tangente (sau metoda lui Newton-Kantorovici)*. Este cea mai cunoscută (MI) avind ordinul de convergenţă doi şi probabil, cea mai frecvent aplicată la rezolvarea multor categorii de ecuaţii. Importanţa ei, mai ales în rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare, este bine reliefată în lucrările [8] şi [9]. Cu toate acestea, principala limitare a ei, şi de fapt a oricărei (MI), este aceea că şirul $(x_n)$ definit prin formula (3.1.1) nu converge către soluţia ecuaţiei (1.2) dacă elementul de pornire (sau iniţial) este arbitrar. Şirul respectiv converge numai dacă acest element, $x_0$, este ,,suficient de apropiat" de soluţia căutată. Cu alte cuvinte, convergenţa şirului $(x_n)$ de elemente aproximante are un caracter local.

L.V. Kantorovici ([11]), pornind de la metoda clasică a lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \qquad n \in N$$

ce se aplică ecuaţiei (1.1), propune următoarea variantă pentru ecuaţia (1.2),

(3.1.1) $$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n), \qquad n \in N,$$

unde am notat $\Gamma_n = [P' x_n)]^{-1} \in L(Y, X)$, $P'(x_n) \in L(X,Y)$ fiind derivata Frèchet (un operator liniar din X în Y).

Pe lingă aceasta se mai dă şi metoda iterativă modificată ((MIM) (sau metoda de iteraţie cu memorie, cf. [18]) corespunzătoare celei de bază (sau (MIB)) (3.1.1) şi anume,

(3.1.1)' $$x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n), \qquad n \in N,$$

care, de asemenea reprezintă transpunerea din cazul real în cel operaţional a (MIM) a lui Newton,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0), \qquad n \in N$$

Aceasta din urmă, pentru cazul real, are următoarea interpretare geometrică: cu dreapta tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$, la curba $y = f(x)$, se duc drepte paralele (translaţii de drepte) ce trec prin punctele $(x_n, f(x_n))$,

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$, drepte pe care le intersectăm cu axa $y = 0$ și primim noile aproximații $x_{n+1}$.

Pe o astfel de idee se bazează și construcția (MIM) a hiperbolelor și parabolelor tangente (cf. [16], [17]). Însă, calculul respectiv este destul de complicat chiar pentru aceste curbe de gradul 2 și se pare că nu se generalizează ușor atunci cînd se ia în considerare hiperbola sau parabola avînd gradul $\geq 3$. Putem constata, mai jos, că modul în care introducem noi operatorul iterativ pentru o (MIM), dă aceasta posibiliatate de generalizare.

Comparînd între ele formulele ce definesc anumite (MI), se poate observa că odată cu creșterea ordinului de convergență al lor, crește și gradul de dificultate în privința posibilităților de aplicare deoarece, formulele respective sînt și ele din ce în ce mai complicate.

3.2. *Metoda generalizată a hiperbolelor tangente.* Această (MIB) este construită prima dată de către M.A. Mertvețova (cf. [13]), urmînd prima cale meționată mai sus.

Pentru cazul ecuației reale, am găsit următoarele expresii (cf. [5]):

$$h_2(x_n)b_n^1 = 1 + 1/2\frac{f''(x_n)x_n}{f'(x_n)} \text{ și } h_2(x_n)b_n^2 = -1/2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)},$$

unde am notat $h_2(x_n) = 1 - 1/2\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)}$

Dacă le transcriem acum pentru cazul ecuației (2.1), atunci pentru elementele $h_0, h_1, h_2 \in X$, obținem:

$$H_2(x_n)h = Ih - 1/2\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma P(x_n))h \in X,$$

unde prin I am notat operatorul identitate din X, adică $I(x) = x$, $\forall x \in X$. Apoi,

$$H_2(x_n)(B_n^1 h_0) = h_0 + 1/2\Gamma_n P''(x_n)x_n h_0 \in X$$

și

$$H_2(x_n)(B_n^2 h_1 h_2) = -1/2\Gamma_n P''(x_n)h_1 h_2 \in X$$

În consecință, $H_2(x_n)$, $B_n^1 \in L(X, X)$ și $B_n^2 \in L_2(X, X)$ (operator biliniar din X în X). Cu ajutorul lor definim operatorul iterativ G atașat ecuației (1.2), prin egalitatea

$$G(x) = x - (B_n^1 + B_n^2 x)(\Gamma_n P(x)), \ \forall x \in D$$

Ținînd cont de proprietatea (2.2), deducem

$$x_{n+1} = x_n - H_2^{-1}(x_n)(\Gamma_n P(x_n)), \ n \in N \tag{3.2.1}$$

Pentru (MIM) corespunzătoare definim operatorul iterativ astfel:

$$G(x) = x - (B_0^1 + B_0^2 x)(\Gamma_0 P(x)), \ \forall x \in D,$$

adică cu ajutorul operatorilor de mai sus $B_n^1$, $B_n^2$ definiți pentru elementul inițial $x_0$. Aplicăm din nou proprietatea (2.2) operatorului G și avem

$$(3.2.1)' \qquad x_{n+1} = x_n - H_2^{-1}(x_n)[I - 1/2\Gamma_n P''(x_n)(x_n - x_0)](\Gamma_0 P(x_n)), \quad n \in N,$$

rezultat la care R.A. Șafiev ajunge pe baza interpretării geometrice mai sus amintită.

Pentru (MIB) de tip hiperbole tangente, avînd ordinul de convergență 4, pornim de la expresiile (cf. [5]):

$$h_3(x_n) = -\frac{f''_n f_n}{f'^2_n} + 1/6\,\frac{f'''_n f^2_n}{f'^3_n}$$

$$h_3(x_n)b_n^1 = 1 - 1/2\,\frac{f''_n f_n}{f'^2_n} + 1/6\left(3 - \frac{f''_n}{f'_n} - \frac{f'''_n f_n}{f'^2_n}\right)x_n +$$

$$+ 1/12\left(3\,\frac{f''^2_n}{f'^2_n} - 2\,\frac{f'''_n}{f'_n}\right)x_n^2$$

$$h_3(x_n)b_n^2 = 1/6\,\frac{f'''_n f_n}{f'^2_n} - 1/2\,\frac{f''_n}{f'_n} + 1/6\left(2\,\frac{f'''_n}{f'_n} - 3\,\frac{f''^2_n}{f'^2_n}\right)x_n$$

și

$$h_3(x_n)b_n^3 = 1/4\,\frac{f''^2_n}{f'^2_n} - 1/6\,\frac{f'''_n}{f'_n}$$

unde am notat $f^{(j)}(x_n) = f_n^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Trecînd la cazul operațional, avem:

$$H_3(x_n) = I - \Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n)) + 1/6\Gamma_n P'''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))^2 \in L(X, X)$$

$$H_3(x_n)B_n^1 = I - 1/2\Gamma_n P''_n(\Gamma_n P_n) + 1/2\Gamma_n P''_n x_n - 1/6\Gamma_n P'''_n(\Gamma_n P_n)x_n +$$

$$+ 1/4\Gamma_n P''_n(\Gamma_n P''_n x_n) - 1/6\Gamma_n P'''_n x_n^2 \in L(X, X)$$

$$H_3(x_n)B_n^2 h_0 = 1/6\Gamma_n P'''_n(\Gamma_n P_n)h_0 - 1/2\Gamma_n P''_n h_0 + 1/3\Gamma_n P'''_n x_n h_0 -$$

$$- 1/2\Gamma_n P''_n(P_n x_n h_0) \in L(X, X)$$

$$H_3(x_n)B_n^3 h_1 h_2 = 1/4\Gamma_n P''_n(\Gamma_n P''_n h_1 h_2) - 1/6\Gamma_n P'''_n h_1 h_2 \in L(X, X)$$

unde $h_0, h_1, h_2 \in X$.

Apoi, definim operatorul de iterație G, pentru (MIB) și (MIM), prin

$$G(x) = x - (B_n^1 + B_n^2 x + B_n^3 x^2)(\Gamma_n P(x)), \quad \forall x \in D$$

și respectiv

$$G(x) = x - (B_0^1 + B_0^2 x + B_0^3 x^2)(\Gamma_0 P(x)), \quad \forall x \in D$$

pentru care obținem pe rînd cele două (MI),

$$(3.2.2) \qquad x_{n+1} = x_n - H_3^{-1}(x_n)[I - 1/2\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))](\Gamma_n P(x_n)), n \in N$$

şi

$$(3.2.2)' \quad x_{n+1} = x_n - H_3^{-1}(x_0)[I - 1/2\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0) + 1/6\Gamma_0 P_0'''(\Gamma_0 P_0)(x_n - $$
$$- 1/2\Gamma_0 P_0''(x_n - x_0) + 1/4\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0''(x_n - x_0)^2) -$$
$$-1/6\Gamma_0 P_0'''(x_n - x_0)^2](\Gamma_0 P_n),\ n \in N$$

unde am notat $P^{(j)}(x_0) = P_0^{(j)},\ j = \overline{0, 3}$.

3.3. *Metoda generalizată a parabolelor tangente (sau metoda lui Cebîşev).* Este construită prima dată de către N.P. Necepurenco (cf. [14]), urmînd cea de a doua cale menţionată.

Dimpotrivă, noi o construim urmînd prima cale, adică cu ajutorul operatorilor (cf. [5]).

$$A_n^1 = I + \Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n)) \in L(X, X)$$

$$A_n^2 h_0 = -1/2\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))h_0 \in L(X, X),\ h_0 \in X$$

şi a operatorilor de iteraţie pentru (MIB) şi (MIM), definiţi prin egalităţile:

$$G(x) = x - (A_n^1 + A_n^2 P(x))(\Gamma_n P(x)), \qquad \forall x \in D,$$

şi

$$G(x) = x - (A_0^1 + A_0^2 P(x))(\Gamma_0 P(x)), \qquad \forall x \in D,$$

obţinînd pe rînd

$$(3.3.1) \qquad x_{n+1} = x_n - [I + 1/2\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))](\Gamma_n P(x_n)),\ n \in N,$$

rezultatul din lucrarea amintită [14];
şi respectiv

$$(3.3.1)' \qquad x_{n+1} = x_n - [I + \Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_n)) -$$
$$- 1/2\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_n))](\Gamma_0 P(x_n)),\ n \in N$$

rezultat ce coincide cu al lui R.A. Safiev, (cf. [17]).

Amintim faptul că în lucrările [3] şi [4] se face o amplă prezentare a (MIB) (3.2.1) şi respectiv (3.3.1), dînd totodată şi o vastă bibliografie.

În continuare, trecem la construcţia (MIB) avînd ordinul de convergenţă 4 şi respectiv la (MIM) corespunzătoare ei.

Considerăm următorii operatori liniari din X în X (cf. [5]):

$$A_n^1 = I + \Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n) + 3/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n)^2) - 1/2\Gamma P_n'''(\Gamma_n P_n)^2$$

$$A_n^2 h_0 = 1/2\Gamma_n P_n'''(\Gamma_n P_n)(\Gamma_n h_0) - 3/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n)^2) - 1/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n h_0)$$

$$A_n^3 h_1 h_2 = 1/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n''(\Gamma_n h_1)(\Gamma_n h_2)) - 1/6\Gamma_n P_n'''(\Gamma_n h_1)(\Gamma_n h_2),$$

şi operatorii de iteratie

$$G(x) = x - (A_n^1 + A_n^2 P(x) + A_n^3 P^2(x))(\Gamma_n P(x)), \qquad \forall x \in D$$

şi respectiv

$$G(x) = x - (A_0^1 + A_0^2 P(x) + A_0^3 P^2(x))(\Gamma_0 P(x)), \qquad \forall x \in D$$

pentru care obținem pe rînd

$$(3.3.2)\quad x_{n+1} = x_n - [I + 1/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n) + 1/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n)^2) - 1/6\Gamma_n P_n'''(\Gamma_n P_n)^3](\Gamma_n P_n), \quad n \in N$$

și respectiv

$$(3.3.2)'\quad x_{n+1} = x_n - [I + \Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0) - 1/2\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_n) + 1/2\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0'' K_0(x_n)) - 1/6\Gamma_0 P_0''' K_0^3(x_n)](\Gamma_0 P_n), \quad n \in N$$

unde am notat $K_0^3(x_n) = 3(\Gamma_0 P_0)^2 - 3(\Gamma_0 P_0)(\Gamma_0 P_n) + (\Gamma_0 P_n)^2$ și $P^{(i)}(x_0) = P_0^{(i)}$.

3.4. *Metoda generalizată a combinațiilor liniare (sau metoda lui Kaazic).* Cu scopul de-a cuprinde intr-o singură formulă mai multe (MI) ce au ordinul de convergenta 3, Iu. Ia. Kaazic (cf. [10]) consideră următoarea clasa de (MI) ce depind de un parametru real $\lambda$,

$$(3.4.1)\quad x_{n+1} = x_n - H_{2,\lambda}^{-1}(x_n)\left[I + \frac{1-\lambda}{2}\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))\right](\Gamma_n P(x_n)), \quad n \in N$$

unde am notat prin $H_{2,\lambda}(x_n) = I - \lambda/2\Gamma_n P''(x_n)(\Gamma_n P(x_n))$

Noi am arătat (cf. [5]) că această (MI) poate fi obținută dintr-o anumită combinație liniară intre (MI)(3.2.1) și (3.3.1). Aplicînd acelaşi raționament pentru (MI) (3.2.1)' și (3.3.1)', am obținut și (MIM) corespunzătoare (cf. [7]),

$$(3.4.1)'\quad x_{n+1} = x_n - H_{2,\lambda}^{-1}(x_0)\{I + (1-\lambda)[\Gamma_0 P_n''(\Gamma_0 P_0) - 1/2\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_n)] - \lambda/2\Gamma_0 P_0''(x_n - x_0)\}(\Gamma_0 P_n), \; n \in N$$

Evident că (3.4.1) și (3.4.1)' conțin cazurile particulare (3.3.1) și respectiv (3.3.1)' pentru $\lambda = 0$ și (3.2.1), respectiv (3.2.1)' pentru $\lambda = 1$. Pentru $\lambda = 2$ obținem (MIB) prezentată în [20] și respectiva (MIM) expusă de noi în [6].

Pornind de la (MIB) (3.2.2) și (3.3.2) putem obține o nouă clasă de (MI) ce depind de un parametru real. În acest scop introducem aceeași notație $d_n = x_{n+1} - x_n$ în cele două (MI) și mai notăm $c_n = -\Gamma_n P(x_n)$. Avem

$$d_n + \Gamma_n P_n'' c_n d_n - 1/6\Gamma_n P_n''' c_n^2 d_n - c_n - 1/2\Gamma_n P_n'' c_n^2 = \theta$$

și

$$d_n - c_n + 1/2\Gamma_n P_n'' c_n^2 - 1/2\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n'' c_n^2)c_n + 1/6\Gamma_n P_n''' c_n^3 = \theta$$

Amplificăm prima relație cu $\lambda$, pe a doua cu $(1-\lambda)$, le adunăm și apoi izolăm din nou $d_n$ în memdbrul sting, obținînd astfel (MIB)

$$(3.4.2)\quad x_{n+1} = x_n - H_{3,\lambda}^{-1}(x_n)\left[I + \frac{1-2\lambda}{2}\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n) + \frac{1-\lambda}{2}\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n)) - \frac{1-\lambda}{6}\Gamma_n P_n'''(\Gamma_n P_n)^2\right](\Gamma_n P_n), \quad n \in N$$

unde am notat $H_{3,\lambda}(x_n) = I - \lambda\Gamma_n P_n''(\Gamma_n P_n) - \lambda/2\Gamma_n P_n'''(\Gamma_n P_n)^2 \in L(X,X)$

În mod asemînător, pentru (MIM), din (3.2.2)′ şi (3.3.2)′ deducem

$$(3.4.2)' \qquad x_{n+1} = x_n - H_{3,\lambda}^{-1}(x_0)\Big\{I + \frac{2-3\lambda}{2}\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0) -$$
$$-(1-\lambda)[1/2\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0) - 1/4\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0'' K_0^2(x_n)) + 1/6\Gamma_0 P_0''' K_0^3(x_n)] -$$
$$-\lambda[1/2\Gamma_0 P_0''(x_n - x_0) - 1/6\Gamma_0 P_0'''(\Gamma_0 P_0)(x_n - x_0) + 1/4\Gamma_0 P_0''(\Gamma_0 P_0''(x_n - x)^2) -$$
$$-1/6\Gamma_0 P_0'''(x_n - x_0)^3]\Big\}(\Gamma_0 P_n),\ n \in N.$$

## LA CONSTRUCTION DES METHODES D'APROXIMATION D'UNE RACINE D'UNE EQUATION (II)

(Resumé)

Dans cette 2ème partie de l'ouvrage nous exposons la généralisation des resultats de la 1ème partie, c.a.d. l'extension des certaines méthodes itératives ((MI)) du cas reel dans le cas operationnel. Ils sont données des nouvelles méthodes d'itération modifiées (MIM)) pou des équations dans des espaces linéaires normées, avec la methodologie de leurs construction

## BIBLIOGRAFIE

1. ALTMAN, M., Concerning Approximate Solutions of Nonlinear Functional Equations, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III-vol. V, Nr. 5, 461—465, 1975.
2. BALASZ, M., Contribuţii la studiul rezolvării ecuaţiilor în spaţii Banach, Teza de doctorat, Cluj, 1968.
3. DÖRING, B., Einige sätze über das Verfahren der tangierenden hyperbleu in Banach-Räumen, Aplikace Matematiky, Nr. 6(15), 418—464, 1970.
4. — Das Tschebyscheff-Verfahren in Banach-Räumen, Numer. Math., 15, 175—195, 1970.
5. GAIDICI, A., Construcţia metodelor de aproximare a rădăcinii unei ecuaţii (I), Bul. St., ser. B, Nr. 1, 227—240, Vol. IV, 1974, Inst. ped. Baia-Mare.
6. — FORNVALD, P., Despre o modificare a unui proces iterativ pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare, Idem, 307—313, 1969.
7. — Asupra unei clase de metode iterative modificate ce se aplica la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare, Idem, vol. III, 193—199, 1971.
8. HENRICI, P., Discret variabile methods in ordinar differential equations, Wiley, 1962.
9. IANKO, B., Sur la théorie unitaire des methodes d'iteration pour la resolution des equations operationneles nonlineaire, Mat. Kut. Köz., T. 6(3), 301—311, 1961.
10. KAAZIC, IU., IA., Ob odnom classe iterationih protesov dlia priblijennovo resenia operatornih uravnenii, DAN SSSR, T.112, Nr. 4, 579—582, 1957.
11. KANTOROVICI, L., V., O metoda Niutona, Tr. Mat. in-ta Steclova, T. 28, 104—144, 1948.
12. — Functionalnii analiz i pricladnaia matematica, UMN, T. 3, Nr. 6(28), 1948.

13. MERTVETOVA, M., A., Analog protessa casatelnih ghiperbol dlia obscih functionalnih uravnenii, DAN SSSR, T. 88, Nr. 4, 611—614, 1953.
14. NECEPURENKO, M., I., O metoda Cebiseva dlia functionalnih uravnenii, UMN, 9(2), 163—170, 1954.
15. PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării ecuaţiilor, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1975.
16. SAFIEV, R., A., Ob odnom modificatii metoda casatelnih ghiperbolih, DAN Azerb., T. 19(1), 3—8, 1963.
17. — Ob odnoi modificatia metoda Cebiseva, J.V.M.i M.F., T. 3, Nr. 5, 950—953, 1963.
18. TRAUB, J., F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Pretince-Hall, Englewood Cliffs, New-York, 1964.
19. TURNER, I., R., Solution of nonlinear systems, Ann. New-York Acad. Sci, 86, 817—828, 1960.
20. VIHANDU, L., K., Iterationsmeetoditest vorondite lahendomisel, Dissertation, Tartu, 1955.