I. MATEMATICĂ

CONGRUENȚE ÎN n-SEMIGRUPURI

de

MARIA S. POP

Definiția congruențelor n-are se transpune de la algebre universale la n-semigrupuri. Se știe că în cazul binar laticea congruențelor pe un grup este izomorfă cu laticea subgrupurilor normale ale grupului; acest izomorfism permite să se identifice congruențele unui grup cu subgrupurile sale normale. Un grup factor în raport cu o congruență are o singură clasă care este subgrup normal al grupului și această clasă determină grupul factor. În caz n-ar ($n \geq 3$) există descompuneri în clase de congruență care să nu posede o astfel de proprietate, motiv pentru care vom face distincție între noțiunea de n-grup (n-semigrup) de clase de resturi (definit de o congruență) și cea de n-grup (n-semigrup) factor (definit cu ajutorul anumitor sub-n-grupuri respectiv sub-n-semigrupuri).

Pornind de la determinarea unor condiții în care un sub-n-semigrup al unui n-semigrup să fie o clasă rest în raport cu o congruență, în lucrare stabilim că pentru n-grupuri, orice sub-n-grup semiinvariant determină o congruență unică astfel încît el să fie o clasă de echivalență în raport cu acea congruență, rezultat care îl generalizează pe cel similar obținut de Timm [4] pentru n-grupuri comutative. Menționăm că Crombez și Six [2] afirmă (fără demonstrație) că rezultatele lui Timm pot fi extinse pentru n-grupuri oarecare.

Numim n-semigrup perechea $(A, {}_0)$ unde A este o mulțime și $0 : A^n \to A$ o operație n-ară asociativă, adică $\forall\, a_i \in A$; $i = 1, \ldots, 2n-1$ și $k = 1, \ldots, n$ avem:

$$((a_1, \ldots, a_n)_0, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})_0 = (a_1, \ldots, a_{k-1}, (a_k, \ldots, a_{k+n-1})_0, a_{k+n}, \ldots, a_{2n-1})_0$$

Submulțimea $H \subset A$ este sub-n-semigrup al n-semigrupului $(A, {}_0)$ dacă ea este închisă în raport cu operația n-ară, deci $(H, \ldots, H)_0 \subset H$. Sub-n-semigrupul H se numește surjectiv dacă $(H, \ldots, H)_0 = H$.

Submulțimea $I \subset A$ este un i-ideal, $i \in \{1, \ldots, n\}$, al n-semigrupului $(A, {}_0)$ dacă pentru orice $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ și orice $x \in I$ avem $(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)_0 \in I$, adică $(A, \ldots, A, I, A, \ldots, A)_0 \subset A$. Pentru simplificarea scrierii notăm produsul de mai înainte prin $(A^{i-1}IA^{n-i})_0$. Prin convenție $(A^{n-1}IA^0)_0 = (A^{n-1}I)_0$ și $(A^0IA^{n-1})_0 = (IA_{n-1})_0$.

n-Semigrupul $(A, {}_0)$ se numește n-grup [3] dacă pentru orice $i = 1, \ldots, n$ și orice alegere a elementelor $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n \in A$, aplicația $f : A \to A$; $f_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)_0$ este o bijecție. Soluția ecuației $(a, \ldots, a, x)_0 = a$ se numește element transversal al lui a și se notează prin $\bar{a}$.

DEFINIȚIE. Fie $(A, {}_\theta)$ un n-semigrup. O relație de echivalență ρ pe A se numește congruență pe (A, θ) dacă ea este compatibilă cu operația n-ară de n-semigrup, adică $\forall\ a_i, b_i \in A$ și $(a_i, b_i) \in \rho$; $i = 1, 2, \ldots, n$ avem $((a_1, \ldots, a_n)_\theta, (b_1, \ldots, b_n)_\theta) \in \rho$.

Pentru orice $a \in A$ definim clasa rest în raport cu congruența ρ ca fiind submulțimea $[a] = \{x \in A/(x, a) \in \rho\}$, iar în mulțimea claselor de resturi modulo ρ ale lui A, $A/\rho = \{[a]/a \in A\}$ definim operația n-ară $([a_1], \ldots, [a_n]) = [(a_1, \ldots, a_n)_\theta] \in \rho$

Următoarele afirmații sînt imediate:

TEOREMA 1. a) Dacă $(A, {}_\theta)$ este un n-semigrup și ρ o congruență în A, atunci A/ρ este n-semigrup numit n-semigrupul claselor de resturi modulo ρ. Aplicația $\rho^\#: A \to A/\rho$; $\rho^\#(a) = [a]$ este un omomorfism surjectiv;

b) Omomorfismul canonic $\rho^\#$ induce o aplicație a mulțimii sub-n-semigrupurilor lui A pe mulțimea sub-n-semigrupurilor lui A/ρ și a mulțimii i-idealelor (idealelor) lui A pe mulțimea i-idealelor (idealelor) lui A/ρ; $i = 1, 2, \ldots, n$;

c) Dacă $(A, {}_\theta)$ este un n-grup, atunci A/ρ este un n-grup (n-grupul claselor de resturi modulo ρ) și pentru orice $a \in A$ avem $\overline{[a]} = [\bar{a}]$.

Ținînd seama de rezultatele obținute în cazul binar ne punem întrebarea: care sînt congruențele unui n-semigrup pentru care o clasă rest modulo ρ să fie sub-n-semigrup al lui A, dar ideal în A? Răspunsul este dat de următoarea

TEOREMA 2. Dacă $(A, {}_\theta)$ este un n-semigrup și ρ este o congruență în A, atunci:

a) Submulțimea $[a] \subset A$ este sub-n-semigrup al lui A dacă și numai dacă $[a]$ este element idempotent în A/ρ;

b) Submulțimea $[a] \subset A$ este i-ideal (ideal); $i = 1, \ldots, n$ al n-semigrupului A dacă și numai dacă $[a]$ este element i-zero (zero) în A/ρ.

Demonstrația este imediată utilizînd teorema 1. În particular, dacă $(A, {}_\theta)$ este n-grup, teoremele 1 c) și 2 ne dau următoarele

COROLARE. 1) Dacă $(A, {}_\theta)$ este un n-grup și ρ o congruență în A, submulțimea $[a] \subset A$, $a \in A$ este sub-n-grup al lui A dacă și numai dacă a este 1-unitate și n-unitate în n-grupul A/ρ;

2) Dacă $(A, {}_\theta)$ este un n-grup comutativ și ρ o congruență pe A, submulțimea $[a] \subset A$; $a \in A$ este sub-n-grup al lui A dacă și numai dacă $[a]$ este element unitate în n-grupul A/ρ.

Am regăsit astfel un rezultat obținut de Timm pentru n-grupurile comutative (teorema 7.4 [4]).

Dîndu-se o congruență ρ în n-semigrupul (n-grupul) $(A, {}_\theta)$ există un sub-n-semigrup (sub-n-grup) unic care este clasă rest în raport cu ρ? Întrebarea are în general un răspuns negativ chiar și în cazul n-grupurilor spre deosebire de cazul binar, după cum reiese din următoarele

EXEMPLE. 1) Fie $A = \{a, b, c\}$ și operația ternară ${}_\theta: A^3 \to A$ definită astfel:

$$(x_1, x_2, x_3)_\theta = \begin{cases} c \text{ dacă } x_1 = x_2 = x_3 = c \\ a \text{ dacă cel puțin un } x_i \neq c \end{cases}; \quad x_1, x_2, x_3 \in A$$

Perechea $(A, {}_\theta)$ este un 3-semigrup comutativ fără unitate avînd două elemente idempotente a și c. Aplicînd congruența Δ_A acestui 3-semigrup, atît $[a] = \{a\}$ cît și $[c] = \{c\}$ sînt sub-3-semigrupuri în A;

2) Fie $A = \{a, b\}$ şi operaţia ternară comutativă ${}_0 : A^3 \to A$ definită astfel: $(a, a, a)_0 = b$; $(a, b, b)_0 = b$; $(a, a, b)_0 = a$; $(b, b, b)_0 = a$. Perechea $(A, {}_0)$ este un 3-grup comutativ fără unitate. Nu există nici o clasă rest în raport cu congruenţa Δ_A definită în A care să fie sub-3-semigrup în A.

Invers, fiind dat un sub-n-semigrup $H \leqslant A$, există o congruenţă ρ în A astfel ca $H \in A/\rho$? Pentru rezolvarea acestei probleme introducem următoarele noţiuni analoage celor introduse de Dörnte [3] pentru n-grupuri.

DEFINIŢIE. Fie $(A, {}_0)$ un n-semigrup şi $H \leqslant$ un sub-n-semigrup al său. H se numeşte semiinvariant dacă pentru orice $x \in A$ avem $(xH^{n-1})_0 = (H^{n-1}x)_0$. H se numeşte invariant dacă pentru orice $x \in A$ avem $(xH^{n-1})_0 = \ldots = (H^{i-1}xH^{n-i})_0 = \ldots = (H^{n-1}x)_0$; $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

În cazul sub-n-semigrupurilor surjective ale unui n-semigrup putem da următoarea caracterizare a sub-n-semigrupurilor invariante:

TEOREMA 3. Dacă $(A, {}_0)$ este un n-semigrup şi H un sub-n-semigrup surjectiv al său atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

a) H este invariant;

b) $(xH^{n-1})_0 = (HxH^{n-2})_0 = (H^{n-1}x)_0$ pentru orice $x \in A$.

D e m o n s t r a ţ i e. Implicaţia a) $\Rightarrow$ b) este evidentă. Pentru a arăta că b) $\Rightarrow$ a) este suficient să demonstrăm că oricare ar fi $x \in A$ şi $i = 1, 2, \ldots, n-3$ din $(H^{i-1}xH^{n-i})_0 = (H^{i}xH^{n-i-1})_0$ rezultă $(H^{i}xH^{n-i})_0 = (H^{i+1}xH^{n-i-2})_0$. Într-adevăr, multiplicînd ambii membri ai primei egalităţi la stînga prin H şi la dreapta cu H de $n-2$ ori şi aplicînd asociativitatea operaţiei n-are şi surjectivitatea lui H, obţinem egalitatea cerută. ■

Crombez şi Six [2] au dat următoarea caracterizare în cazul n-grupurilor unui sub-n-grup invariant:

TEOREMA 4 [2]. Sub-n-grupul H al unui n-grup $(A, {}_0)$ este invariant dacă şi numai dacă pentru orice $x \in A$ avem

$$(x, \ldots, x, \bar{x}, H, x)_0 = H \text{ sau } (x, H, \bar{x}, x, \ldots, x)_0 = H.$$

În continuare vom introduce noţiunea de n-semigrup i-factor al unui n-semigrup în raport cu un sub-n-semigrup al său.

TEOREMA 5. Dacă H este un sub-n-semigrup surjectiv semiinvariant al unui n-semigrup $(A, {}_0)$, atunci mulţimea $A/H, i = \{(H^{i-1}xH^{n-i})_0 ; x \in A\}$; $i \in \{1, \ldots, n\}$ formează un n-semigrup în raport cu operaţia n-ară din A. Vom numi acest n-semigrup, n-semigrupul i-factor în raport cu H.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru un i fixat, $i \in \{1, \ldots, n\}$, fie $(H^{i-1}x_jH^{n-i})_0 \in A/H, i$; $j = 1, \ldots, n$. Deoarece H este surjectiv şi semiinvariant folosind convenabil asociativitatea operaţiei n-are, avem:

$$((H^{i-1}x_1H^{n-i})_0, (H^{i-1}x_2H_{n-i})_0, \ldots, (H^{i-1}x_nH^{n-i})_0)_0 =$$
$$= (H^{i-1}(x_1H^{n-1})_0, (x_2H^{n-1})_0, \ldots, (x_{n-1}H^{n-1})_0, x_n)_0H^{n-i})_0 =$$
$$= (H^{i-1}((H^{n-1}x_1)_0, (H^{n-1}x_2)_0, \ldots, (H^{n-1}x_{n-1})_0, x_n)_0H^{n-i})_0 =$$
$$= (H^{i-1}(x_1, (H^{n-1}x_2)_2, \ldots, (H^{n-1}x_{n-1})_0, x_n)_0H^{n-i})_0 =$$
$$= (H^{i-1}((x_1H^{n-1})_0, (x_2H^{n-1})_0, \ldots, (x_{n-2}H^{n-1}), x^{n-1}, x_n)_0H^{n-i})_0 =$$
$$= \ldots = (H^{i-1}(x_1, \ldots, x_n)_0 H^{n-i})_0 \in A/H, i$$

Aceasta demonstrează că mulţimea $A/H, i$ este închisă faţă de operaţia n-ară „$_0$” şi cum „$_0$” este asociativă rezultă că $A/H, i$ este un n-semigrup. ■

Observăm că H fiind semiinvariant avem $A/H, 1 = A/H, n$.
Dacă H este sub-n-semigrup invariant atunci el determină un n-semigrup factor unic notat simplu prin A/H.

În ipotezele teoremei 5, aplicaţiile $f : A \to A/H, i$; $f_i(x) = (H^{i-1}xH^{n-i})_0$ $i = 1, \ldots, n$ sînt omomorfisme ale lui A pe n-semigrupul i-factor a lui A în raport cu H. Notînd congruenţa indusă de f_i prin $\rho_{H,i} = \ker f_i$, deoarece $f(A) = A/H, i$, aplicînd prima teoremă de izomorfism de la algebre universale [1] rezultă că avem $A/\rho_{H,i} \cong A/H, i$. Are loc următorul

COROLAR. Dacă H este un sub-n-semigrup surjectiv semiinvariant al unui n-semigrup $(A, {}_0)$, atunci există o congruenţă $\rho_{H,i}$, $i = 1, \ldots, n$ astfel încît n-semigrupul claselor de resturi modulo $\rho_{H,i}$ să fie izomorf cu n-semigrupul i-factor al lui A în raport cu H.

Răspunsul la întrebarea „este H o clasă de congruenţă în raport cu $\rho_{H,i}$?” este în general negativ. Drept contraexemplu serveşte 3-semigrupul $A = \{a, b, c\}$ (Exemplul 1 anterior) cu sub-3-semigrupul $H = \{a, c\}$. Deoarece A este comutativ, H este semiinvariant şi $(H, H, H)_0 = H$. Cum $(a, H, H)_0 = (b, H, H)_0 = \{a\}$ şi $(c, H, H)_0 = \{a, c\}$, rezultă că $A/\rho_H = \{[a], [c]\}$ unde $[a] = \{a, b\}$ şi $[c] = \{c\}$, deci $H \notin A/\rho_H$.

Totodată elementul c fiind idempotent, $\{c\}$ este sub-3-semigrup surjectiv invariant al lui A şi cum $(a, c, c)_0 = (b, c, c)_0 \neq (c, c, c)_0$ rezultă că $A/\rho_{\{c\}} = \{[a], [c]\}$, iar $\{c\} \in A/\rho_{\{c\}}$. Mai mult, avem $A/\rho_H = A/\rho_{\{c\}}$ ceea ce ne indică că n-semigrupurile factor în raport cu două sub-n-semigrupuri diferite pot coincide.

Următoarea teoremă dă o condiţie suficientă pentru ca un sub-n-semigrup să fie o clasă de congruenţă modulo $\rho_{H,i}$, adică $H \subset A/\rho_{H,i}$.

TEOREMA 6. Dacă $(A, {}_0)$ este un n-semigrup şi H un sub-n-grup semiinvariant al său atunci $H \in A/\rho_{H,i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

D e m o n s t r a ţ i e. Conform corolarului teoremei 5, $\rho_{H,i}$; $i = 1, \ldots, n$ este o congruenţă pe A. Fie $h_0 \in H$ un element fixat din H şi $[h_0] = \{x \in A/(x, h_0) \in \rho_{H,i}\}$. Vom arăta că $H = [h_0]$. Într-adevăr pentru orice $x \in H$ avem

$$(H^{i-1}xH^{n-i})_0 = (H^{i-1}(h_0, \overline{h}_0, \ldots, h_0, x)_0H^{n-i})_0 =$$

$$= (H^{i-1}, h_0, (\overline{h}_0, h_0, \ldots, h_0, x, H)_0, H^{n-i-1})_0 \cup (H^{i-1}h_0HH^{n-i-1})_0 \subset$$

$$\subset (H^{i-1}h_0H^{n-i})_0, \text{ iar } (H^{i-1}h_0H^{n-i})_0 = (H^{i-1}(x, \overline{x}, \ldots, x, h_0)_0, H^{n-i})_0 \subset$$

$$\subset (H^{i-1}, x, (\overline{x}, \ldots, h_0, H)_0, H^{n-i-1})_0 \subset (H^{i-1}xH^{n-i})_0,$$

ceea ce demonstrează că $(H^{i-1}h_0H^{n-i})_0 = (H^{i-1}xH^{n-i})_0$, adică $x \in [h_0]$ şi prin urmare $H \subset [h_0]$.

Dacă $x \in [h_0]$, atunci $(H^{i-1}xH^{n-i})_0 = (H^{i-1}h_0H^{n-i})_0 \subset H$. Cum H este sub-n-grup, din $(H^{i-1}xH^{n-i})_0 \subset H$ rezultă că $x \in H$, deci $[h_0] \subset H$. Ţinînd seama de incluziunea precedentă avem $[h_0] = H$. ■

Condiţia din teorema 6 este suficientă dar nu necesară pentru ca un sub-n-semigrup să fie clasă rest în raport cu o congruenţă. Drept contraexemplu serveşte congruenţa: Fie I un ideal al unui n-semigrup $(A, {}_0)$ (deci I este şi sub-n-semigrup al lui A). Relaţia „$\equiv$” definită

$a \equiv b \Leftrightarrow$ sau $a = b$ sau $a \in I$ și $b \in I$ este o relație de congruență, iar $A/\equiv = \{I\} \cup \{x/x \in A \setminus I\}$, adică $I \in A/\equiv$ deși I nu este sub-n-grup al lui A.

În categoria n-grupurilor vom demonstra că sub-n-grupurile semiinvariante (și nu numai cele invariante) joacă rolul sugbrupului normal din cazul binar.

TEOREMA 7. Dacă (A, φ) este un n-grup și H un sub-n-grup semiinvariant al său, atunci H determină pe A o congruență unică ρ cu proprietatea că H este o clasă rest în raport cu ρ.

Demonstrație. Fie $a, b \in A$ astfel încît $(a, b) \in \rho_{H,i}$ adică $(H^{i-1}aH^{n-i})_\varphi = (H^{i-1}bH^{n-i})_\varphi$. Pentru orice $h_i \in H$ există $h'_j \in H$; $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ astfel încît

$$(h_1, \ldots, h_{i-1}, a, h_{i+1}, \ldots, h_n)_\varphi = (h'_1, \ldots, h'_{i-1}, b, h'_{i+1}, \ldots, h'_n)_\varphi.$$

(A, φ) fiind n-grup elementul a poate fi explicitat cu ajutorul elementelor transversale folosind $(n-1)(n-2)+1$ factori astfel

$$a = (h_{i-1}, \ldots, \bar{h}_{i-1}, \ldots, h_1, \ldots, \bar{h}_1, (h'_1, \ldots, b, \ldots, h'_n)_\varphi, h_n, \ldots, \bar{h}_n, \ldots, h_{i+1}, \ldots, \bar{h}_{i+1})_\varphi,$$

fiecare h_j apărînd în produs de $n-3$ ori.

Prin urmare $a \in (H^{(n-1)(i-1)}bH^{(n-1)(n-i)})_\varphi$. Deoarece $(n-1)(i-1) \equiv 0 \pmod{n-1}$ și $(n-1)(n-i) \equiv 0 \pmod{n-1}$, rezultă că pentru orice $i = 2, \ldots, n-1$ avem

$$a \in ((H^{n-1}b)_\varphi H^{n-1})_\varphi = ((bH^{n-1})_\varphi H^{n-1})_\varphi = (bH^n H^{n-2})_\varphi = (bH^{n-1})_\varphi,$$

adică $(a, b) \in \rho_{H,i}$ implică $a \in (bH^{n-1})_\varphi$. Analog se demonstrează că $b \in (aH^{n-1})_\varphi$.

Fie ρ o congruență oarecare pe A cu proprietatea $H \in A/\rho$. Din $a \in (bH^{n-1})_\varphi$ rezultă că are loc incluziunea $[a] \subset [(bH^{n-1})_\varphi] = ([b]\, H^{n-1})_\varphi$, unde $[a]$, $[b]$ reprezintă clasele rest modulo ρ. Din ipoteză $H = [H]$ și conform corolarului 1 al teoremei 2, H este 1-unitate în n-grupul A/ρ, deci $[a] \subset ([b]\, H^{n-1})_\varphi = [b]$. La fel se demonstrează că $[b] \subset [a]$, deci $[a] = [b]$ și $(a, b) \in \rho$, ceea ce demonstrează că $\rho_{H,i} \subset \rho$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Reciproc, oricare ar fi congruența ρ cu proprietatea $H \in A/\rho$ ea este inclusă în ρ. Într-adevăr, dacă $a, b \in A$ și $(a,b) \in \rho$, atunci $[a] = [b]$ și $[H] = H$, deci $H = [H] = [(\bar{a}, a, \ldots, a, H)_\varphi] = ([\bar{a}], [a], \ldots, [a], H)_\varphi = ([\bar{a}], [a], \ldots, [b], H)_\varphi = [(\bar{a}, a, \ldots, b, H)_\varphi]$, ceea ce demonstrează că $(\bar{a}, a, \ldots, a, b, H)_\varphi \subset H$.

Pentru oricare $i = 1, \ldots, n$ avem $(H^{i-1}bH^{n-i})_\varphi = (H^{i-1}(a, \bar{a}, a, \ldots, b)_\varphi, H^{n-i})_\varphi = (H^{i-1}, a, (\bar{a}, a, \ldots, b, H)_\varphi, H^{n-i-1})_\varphi \subset (H^{i-1}, a, H, H^{n-i-1})_\varphi = (H^{i-1}aH^{n-i})_\varphi$.

La fel se demonstrează că $(H^{i-1}aH^{n-i})_\varphi \subset (H^{i-1}bH^{n-i})_\varphi$ deci $(H^{i-1}aH^{n-i})_\varphi = (H^{i-1}bH^{n-i})_\varphi$, adică $(a, b) \in \rho_{H,i}$. De aici rezultă că $\rho = \rho_{H,i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ și putem nota mulțimea A/ρ prin A/H. ■

Teorema demonstrează că noțiunile de n-grup factor în raport cu un sub-n-grup semiinvariant și n-grup al claselor de resturi modulo ρ coincid, generalizînd rezultatul similar obținut de Timm [4] pentru n-grupuri comutative.

BIBLIOGRAFIE

1. COHN, P. M., Universal Algebra, Harper's Series in Modern Math 1965.
2. CROMBEZ, G., SIX, G., On topological n-groups, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 41, 1974, p. 115–124.
3. DÖRNTE, W., Untersuchungen über einere verallgemeinerten Gruppen begriff, Math. Zeit., 29, 1928, p. 1–19.
4. TIMM, J., Kommutative n-Gruppen, Dissetation sur Erlangung der Doktorgrades, Hamburg 1967.

RÉSUMÉ

En partant de la détermination de quelques conditions où un sous-n-semi-groupe d'un n-semi-groupe soit une classe reste par rapport à une congruence, on établit que, pour des n-groupes n' importe quel sous-n-groupe semi-invariant détermine une congruence unique de sorte n-groupe qu'il soit une classe d'équivalence par rapport à cette congruence. Ce résultat généralise celui similaire obtenu par Timm [4] pour n groupes commutables.