O METODĂ DE TIP RUNGE-KUTTA CU ESTIMAREA ERORII DE TRUNCHIERE

de

IULIAN COROIAN

1. Introducere.

Se consideră problema lui Cauchy

$$y'(x) = f(x, y(x)); \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.1.}$$

care trebuie integrată numeric pe rețeaua de noduri echidistante $x_n = x_0 + nh$; $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$. Presupunem că funcția $f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este suficient de regulată pentru ca problema (1.1) să admită soluția $y(x)$ pe intervalul I care conține toate nodurile ce vor fi considerate în cele ce urmează.

În acest scop vom deduce o metodă Runge-Kutta de ordinul 4 care necesită 6 evaluări a funcției $f(R - K_{4,6})$, dată de relațiile

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{n} c_i k_i, \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_i = f(x_n + a_i h, \; y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j); \quad i = \overline{2, 6}, \end{gathered} \tag{1.2.}$$

$a_i, b_{ij}, c_i \in \mathbf{R}$, iar y_{n+1} este valoarea aproximativă a lui $Y_n(x_{n+1})$, $Y_n(x)$ fiind soluția problemei lui Cauchy „locale".

$$Y_n'(x) = f(x, Y_n(x)); \quad Y_n(x_n) = y_n. \tag{1.3}$$

Metoda de tipul (1.2) construită de noi are avantajul că pe lîngă valoarea aproximativă y_{n+1} a soluției problemei (1.1) – (1.3) ne furnizează și o estimare „aposteriori" a erorii locale de trunchiere.

$$T_n = Y_n(x_{n+1}) - y_{n+1} = \tau_n + 0(h^6), \tag{1.4}$$

care folosește numai funcțiile k_i, $i = \overline{1, 6}$ care intră în construirea soluției aproximative y_{n+1}. Această estimare va fi de forma

$$\tau_n = h \sum_{i=1}^{6} (d_i - c_i) k_i, \tag{1.5}$$

cu $d_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, 6}$.

Metoda prezentată este o extindere a metodei dată în [1] și [2].

2. Ecuaţiile algebrice satisfăcute de parametri a_i, c_i, d_i, b_{ij}

Pentru ca metoda $R-K_{4,6}$ definită de (1.2) să aibă ordinul de exactitate 4, iar estimarea (1—5) să aibă ordinul 5, din dezvoltările Taylor după puterile lui h a lui $Y_n(x_n + h)$, y_{n+1}, τ_n se pot deduce următoarele ecuaţii pentru a_i, c_i, d_i, b_{ij}.

(2.1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} c_i = 1,$ (2.2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} d_i = 1$

(2.3) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} c_i a_i = \frac{1}{2},$ (2.4) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} d_i a_i = \frac{1}{2},$

(2.5) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} c_i a_i^2 = \frac{1}{3},$ (2.6) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} d_i a_i^2 = \frac{1}{3},$

(2.7) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} c_i a_i^3 = \frac{1}{4},$ (2.8) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} d_i a_i^3 = \frac{1}{4},$

(2.9) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} d_i a_i^4 = \frac{1}{5},$

(2.10) $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} c_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j = \frac{1}{6},$ (2.11) $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} d_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j = \frac{1}{6},$

(2.12) $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} c_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j^2 = \frac{1}{12},$ (2.13) $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} d_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j^2 = \frac{1}{12},$

(2.14) $$\sum_{i=4}^{6} c_i \sum_{j=3}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} b_{jk} a_k = \frac{1}{24},$$

(2.15) $$\sum_{i=4}^{6} d_i \sum_{j=3}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} b_{jk} a_k = \frac{1}{24},$$

(2.16) $$\sum_{i=3}^{6} c_i a_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j = \frac{1}{8},$$

(2.17) $$\sum_{i=3}^{6} d_i a_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j = \frac{1}{8},$$

(2.18) $$\sum_{i=3}^{6} d_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j^3 = \frac{1}{20},$$

(2.19) $$\sum_{i=4}^{6} d_i \sum_{j=3}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} b_{jk} a_k^2 = \frac{1}{60},$$

(2.20) $$\sum_{i=5}^{6} d_i \sum_{j=4}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=3}^{j-1} b_{jk} \sum_{s=2}^{k-1} b_{ks} a_s = \frac{1}{120}.$$

(2.21) $$\sum_{i=3}^{6} d_i a_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j^2 = \frac{1}{15},$$

$$\sum_{i=3}^{6} d_i a_i^2 \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j = \frac{1}{10}, \tag{2.22}$$

$$\sum_{i=4}^{6} d_i \sum_{j=3}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} b_{jk} a_k (a_i + a_j) = \frac{7}{120}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=3}^{6} d_i \left(\sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} a_j \right)^2 = \frac{1}{20}, \tag{2.24}$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}; \quad i = 2, 3, 4, 5, 6. \tag{2.25}$$

Aşadar se pune problema determinării constantelor $a_i, c_i, d_i, b_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, 6}$; $a_1 = 0$, $j = \overline{1, i-1}$, în număr de 32, care constituie o soluţie a sistemului neliniar de 29 de ecuaţii (2.1)—(2.25). Rezolvarea completă a acestui sistem neliniar este o problemă dificilă, poate chiar imposibilă, chiar găsirea unei soluţii formată din numere raţionale avînd un ordin de mărime rezonabil, pretinde calcule laborioase.

3. Prezentarea metodei.

Vom prezenta o soluţie a sistemului (2.1)—(2.25), adică o metodă $R-K_{4,6}$ de forma (1.2) cu estimarea (1.5) găsită în condiţiile simplificatoare.

$$c_2 = d_2 = b_{65} = 0, \tag{3.1}$$

$$a_i^2 = 2 \sum_{k=2}^{i-1} b_{ik} a_k; \quad i = 3, 4, 5, 6. \tag{3.2}$$

Vom prezenta aici metoda renunţînd la deducerea ei care ar necesita foarte mult spaţiu. Această metodă este

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12}\left(-\frac{1229}{13}k_1 + \frac{5725}{78}k_3 - \frac{443}{39}k_4 + \frac{325}{6}k_5 - \frac{29}{3}k_6\right), \\
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{5}, y_n + \frac{1}{5}hk_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{2}{5}hk_2\right), \\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + \frac{h}{4}(9k_1 + - 20k_2 + 15k_3)\right), \\
k_5 &= f\left(x_n - \frac{2}{5}h, y_n + \frac{h}{3}\left(-\frac{1777}{195}k_1 + \frac{1292}{195}k_2 + \frac{257}{65}k_3 - \frac{8}{3}k_4\right)\right), \\
k_6 &= f\left(x_n - h, y_n + \frac{h}{39}(19k_1 - 220\,k_2 + 175\,k_3 - 13k_4)\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

cu următoarea estimare a erorii de trunchiere

$$T_n = \frac{h}{4}\,[42k_1 - 25(k_3 + k_5) + 4(k_4 + k_6)] + 0(h^6). \tag{3.4}$$

Observaţia 3.1. Estimarea (3.4) are avantajul că are o formă simplă şi ea foloseşte numai funcţiile k_i, $i = \overline{1, 6}$, care intră la construirea soluţiei aproximative y_{n+1}. De asemenea avînd în vedere forma estimării (3.4) ea poate fi aplicată şi la integrarea numerică a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi.

BIBLIOGRAFIE

1. COROIAN, I.: „Despre estimarea erorii la unele formule de tip Runge-Kutta", Volumul „Sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic Cluj-Napoca", 28–29 oct. 1978, p. 7–12.
2. COROIAN, I.: „Contribuţii la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul metodelor de tip Runge-Kutta" Teză de doctorat Univ. Cluj-Napoca, 1979, p. 78.

ABSTRACT

A method of Runge-Kutta type (3.8) of order four with six stages for differential probleme (1.1)–(1.3) is derived. Also is presented an estimation of local truncation error, given by (3.4) formula.