REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE PRIN METODE ITERATIVE GENERATE DE O FAMILIE DE HIPERBOLE DE GRADUL DOI.

de

A. GAIDICI

1. Fie ecuaţia scalară

$$f(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \tag{1}$$

a cărei unică soluţie $x^* \in [\alpha, \beta]$ o presupunem simplă şi că ea nu se poate găsi exact, ci numai printr-un şir de aproximaţii succesive ce converge spre x^*. Pe scurt, soluţia x^* poate fi găsită numai aplicînd o metodă iterativă ecuaţiei (1). Despre funcţia f presupunem că este continuă împreună cu derivatele ei pînă la ordinul doi inclusiv pe $[\alpha, \beta]$ sau că admite diferenţe divizate pînă la ordinul doi inclusiv pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Mai precis, există relaţiile [4]:

$$[u, v; f] = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}, \text{ dacă } u \neq v$$

$$[u, u; f] = f'(u), \text{ dacă } u = v$$

şi respectiv

$$[u, v, w; f] = \frac{[v, w; f] - [u, v; f]}{w - u}, \text{ dacă } u \neq v, \ v \neq w, \ w \neq u$$

$$[u, u, u; f] = 1/2 \, f''(u), \text{ dacă } u = v = w$$

pentru orice $u, v, w \in [\alpha, \beta]$.

Aproximarea soluţiei x^* a ecuaţiei (1) prin metode iterative de tip hiperbole constă în aceea că pe intervalul $[\alpha, \beta]$ curba $y = f(x)$ se înlocuieşte prin hiperbola $y = (x - c)/(a + bx)$. Evident, c poate fi considerat o aproximantă a lui x^*, adică

$$x^* \simeq c, \ c = x - (a + bx)y$$

Aceasta ne conduce la considerarea funcţiei de iteraţie $g: [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ de forma

$$g(x) = x - (a + bx)f(x), \ \forall x \in [\alpha, \beta],$$

unde constantele a şi b se determină prin condiţia ca hiperbola şi curba să aibă 3 puncte în comun (contact 3-punctual). Cu aproximaţiile iniţiale $x_0, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, se obţin următoarele metode iterative de tip „hiperbole de gradul doi" [2]:

Metoda de bază a hiperbolelor secante 1, [2],

$$(1.1)\qquad x_{n+3} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})[x_n, x_{n+1}; f]^{-1} f(x_n),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda modificată a hiperbolelor secante 1, [2],

$$(1.1)'\qquad x_{n+3} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_1, x_2)\left(1 - \frac{[x_0, x_1, x_2; f](x_n - x_0)}{[x_1, x_2; f]}\right)\frac{f(x_n)}{[x_0, x_1; f]},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 1 - \frac{[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; f]f(x_{n+1})}{[x_n, x_{n+1}; f][x_{n+1}, x_{n+2}; f]}$$

Metoda de bază a hiperbolelor secante 2, [2],

$$(1.2)\quad x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})[x_n, x_{n+1}; f]^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda modificată a hiperbolelor secante 2, [2],

$$(1.2)'\qquad x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_1, x_1)\left(1 - \frac{[x_0, x_1, x_1; f](x_n - x_0)}{f'(x_1)}\right)\frac{f(x_n)}{[x_0, x_1; f]},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 1 - \frac{[x_n, x_{n+1}, x_{n+1}; f]f(x_{n+1})}{[x_n, x_{n+1}; f]f'(x_{n+1})}.$$

Metoda de bază a hiperbolelor secante 3, [2],

$$(1.3)\quad x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_n, x_{n+1})[f'(x_n)]^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda modificată a hiperbolelor secante 3, [2],

$$(1.3)'\qquad x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_0, x_1)\left(1 - \frac{[x_0, x_0, x_1; f](x_n - x_0)}{[x_0, x_1; f]}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_n, x_{n+1}) = 1 - \frac{[x_n, x_n, x_{n+1}; f]f(x_n)}{[x_n, x_{n+1}; f]f'(x_n)}$$

Metoda de bază a hiperbolelor tangente [5],

$$(1.4)\quad x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_n, x_n)[f'(x_n)]^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda modificată a hiperbolelor tangente [6],

$$(1.4)'\qquad x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_0, x_0)\left(1 - \frac{f''(x_0)(x_n - x_0)}{f'(x_0)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_0)},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_n, x_n) = 1 - (1/2)\,\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)}$$

Metoda de bază a falsei poziţii 1, [2],

$$x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_{n+1}, \overline{x}_0)[x_n, x_{n+1};\ f]^{-1}f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Metoda modificată a falsei poziţii 1, [2],

$$x_{n+2} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_1, \overline{x}_0)\left(1 - \frac{[x_0, x_1, \overline{x}_0 ; f](x_n - x_0)}{[x_1, \overline{x}_0 ; f]}\right)\frac{f(x)}{[x_0, x_1 ; f]}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5'}$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_{n+1}, \overline{x}_0) = 1 - \frac{[x_n, x_{n+1}, \overline{x}_0 ; f]f(x_{n+1})}{[x_n, x_{n+1} ; f][x_{n+1}, \overline{x}_0 ; f]}$$

Metoda de bază a falsei poziţii 2, [2],

$$x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_n, x_n, \overline{x}_0)[f'(x_n)]^{-1}f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Metoda modificată a falsei poziţii 2, [2],

$$x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_0, x_0, \overline{x}_0)\left(1 - \frac{[x_0, x_0, \overline{x}_0 ; f]\,(x_n - x_0)}{[x_0, \overline{x}_0 ; f]}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6'}$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, x_n, \overline{x}_0) = 1 - \frac{[x_n, x_n, x_0 ; f]f(x_n)}{f'(x_n)[x_n, \overline{x}_0 ; f]}$$

Metoda de bază a falsei poziţii 3, [3],

$$x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_0)[x_n, x_1 ;\ f]^{-1}f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Metoda modificată a falsei poziţii 3, [2],

$$x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_0, \overline{x}_1, \overline{x}_0)\left(1 - \frac{[x_0, \overline{x}_1, \overline{x}_0 ; f](x_n - x_0)}{[\overline{x}_0, \overline{x}_1 ; f]}\right)\frac{f(x_n)}{[x_0, \overline{x}_1 ; f]}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7'}$$

unde am notat prin

$$h_2(x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_0) = 1 - \frac{[x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_0 ; f]f(x_1)}{[x_n, \overline{x}_1 ; f][\overline{x}_0, \overline{x}_1 ; f]}$$

Metoda de bază a falsei poziţii 4, [2],

$$x_{n+1} = x_n - h_2^{-1}(x_n, \overline{x}_0, \overline{x}_0)[x_n, \overline{x}_0 ;\ f]^{-1}f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

Metoda modificată a falsei poziții 4, [2],

$$
(1.8)' \qquad x_{n+1} = x_n - h_2(x_n, \bar{x}_0, \bar{x}_0)\left(1 - \frac{[x_0, \bar{x}_0, \bar{x}_0 ; f](x_n - x_0)}{f'(\bar{x}_0)}\right)\frac{f(x_n)}{[x_n, \bar{x}_0 ; f]}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
$$

unde am notat prin

$$
h_2(x_n, \bar{x}_0, \bar{x}_0) = 1 - \frac{[x_n, \bar{x}_0, \bar{x}_0 ; f]f(\bar{x}_0)}{[x_n, \bar{x}_0 ; f]f'(\bar{x}_0)}
$$

În rezumat, dăm următoarea schemă de clasificare a metodelor iterative staționare generate de o familie de hiperbole de gradul doi [2]:

(1.1)		(1.2)		(1.3)		(1.4)	
(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})	3	(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})	3	(x_n, x_n, x_{n+1})	3	(x_n, x_n, x_n)	3
$(x_n ; x_0, x_1, x_2)$	1	$(x_n ; x_0, x_1, x_1)$	1	$(x_n ; x_0, x_0, x_1)$	1	$(x_n ; x_0, x_0, x_0)$	1
(1.1)'		(1.2)'		(1.3)'		(1.4)'	

(1.5)		(1.6)		(1.7)		(1.8)	
$(x_n, x_{n+1}, \bar{x}_0)$	2	$(x_n, x_n, \bar{x}_0)$	2	$(x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_0)$	1	$(x_n, \bar{x}_0, \bar{x}_0)$	1
$(x_n ; x_0, x_1, \bar{x}_0)$	1	$(x_n ; x_0, x_0, \bar{x}_0)$	1	$(x_n ; x_0, \bar{x}_1, \bar{x}_0)$	1	$(x_n ; x_0, \bar{x}_0, \bar{x}_0)$	1
(1.5)'		(1.6)'		(1.7)'		(1.8)'	

Fiecare dreptunghi conține elementele cu ajutorul cărora se calculează următorul element. Cifra din dreapta indică ordinul de convergență al metodei respective.

2. În continuare ilustrăm modul cum metodele (1.1) — (1.8)' pot fi aplicate la rezolvarea prin aproximații succesive a unui sistem de ecuații neliniare. Pentru simplitate considerăm sistemul:

$$
(2) \qquad \begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}
$$

Despre funcțiile f_1 și f_2 presupunem că sînt continui în raport cu variabilele respective și la fel derivatele lor parțiale de ordinul întîi, pe intervalul bidimensional $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ ce conține soluția simplă (x^*, y^*) a sistemului (2); sau că funcțiile f_1 și f_2 admit diferențe divizate de ordinul întîi, și doi pe care le vom preciza mai jos.

Pentru exemplificare, alegem numai cîteva din metodele cuprinse în schema de mai sus, pe care le vom aplica sistemului (2). Mai înainte, însă, avem nevoie de semnificațiile corespunzătoare pentru cazul sistemului (2) a unor expresii din formulele (1.1) — (1.8)'. În acest scop introducem notațiile:

$$
P(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

În sfîrşit,

— derivata $f'(x_n)$ se înlocuieşte prin matricea

$$P'(x_n,\ y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x_n,\ y_n)$$

— derivata $f''(x_n)$ se înlocuieşte prin matricea

$$P''(x_n,\ y_n)(h_1,\ k_1)^T\ (h_2,\ k_2) = \begin{vmatrix} (h_2,\ k_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \\ \\ (h_2,\ k_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

notată mai simplu prin [3]

$$((h_2,\ k_2)\ H_1(x_n,\ y_n)(h_1,\ k_1)^T,\ (h_2,\ k_2)\ H_2(x_n,\ y_n)(h_1,\ k_1)^T)^T$$

unde prin $H_i(x_n,\ y_n)$; $i = 1,\ 2$; am notat hessianul funcţiilor f_i.

— diferenţa divizată de ordinul întîi $[x_n,\ x_{n+1};\ f]$ se înlocuieşte prin matricea

$$P_1(x_n,\ y_n;\ x_{n+1},\ y_{n+1}) = \begin{pmatrix} [x_n,\ x_{n+1};\ y_n;\ f_1] & [x_n,\ y_n,\ y_{n+1};\ f_1] \\ [x_n,\ x_{n+1};\ y_n;\ f_2] & [x_n,\ y_n,\ y_{n+1};\ f_2] \end{pmatrix}$$

unde am notat, spre exemplu,

$$[u,\ v;\ w;\ f_1] = \frac{f_1(v,w) - f_1(u,v)}{v - u},\ \text{dacă}\ u \neq v$$

$$[u,\ u;\ w;\ f] = \frac{\partial f_1(u,\ w)}{\partial u},\ \text{dacă}\ u = v$$

— diferenţa divizată de ordinul doi $[x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2};\ f]$ se înlocuieşte prin matricea

$$P_2(x_n,\ y_n;\ x_{n+1},\ x_{n+1},\ x_{n+2}, y_{n+2})(h_1,\ k_1)^T(h_2,\ k_2) = ((h_2,\ k_2)\ G_1(x_n,\ y_n;\ \ldots;$$
$$x_{n+2},\ y_{n+2})\ (h_1,\ k_1)^T,\ (h_2,\ k_2)\ G_2(x_n,\ y_n;\ y_{n+1},\ x_{n+1};\ x_{n+2},\ y_{n+2})(h_1,\ k_1)^T)^T$$

unde $G_i(x_n, y_n; \ldots)$; $i = 1, 2$; ţine locul hessienilor precedenţi, adică

$$G_i(x_n, y_n; \ldots; x_{n+2}, y_{n+2}) = \begin{pmatrix} [x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; y_n; f_i] & [x_n, x_{n+1}; y_n, y_{n+1}; f_i] \\ [y_n, y_{n+1}; x_n, x_{n+1}; f_i] & [x_n; y_n, y_{n+1}, y_{n+2}; f_i] \end{pmatrix}$$

iar diferenţele divizate de ordinul doi fiind

$$[u_0, u_1, u_2; v_0; f_i] = \frac{[u_1, u_2; v_0; f_i] - [u_0, u_1; v_0; f_i]}{u_2 - u_0}, \text{ adcă } u_0 \neq u_1,$$

$$u_1 \neq u_2, \; u_2 \neq u_0$$

$$[u_0, u_0, u_1; v_0; f_i] = \frac{[u_0, u_1; v_0; f_i] - [u_0, u_0; v_0; f_i]}{u_1 - u_0}, \text{ dacă } u_0 \neq u_1$$

$$[u_0, u_0, u_0; v_0; f_i] = \frac{\partial^2 f_i(u_0, v_0)}{\partial u^2}, \text{ dacă } u_0 = u_1 = u_2$$

$$[u_0, u_1; v_0, v_1; f_i] = \frac{[u_1; v_0, v_1; f_i] - [u_0; v_0, v_1; f_i]}{u_1 - u_0}, \text{ dacă } u_0 \neq u_1$$

$$[u_0, u_1; v_0, v_1; f_i] = \frac{[u_0, u_1; v_1; f_i] - [u_0, u_1; v_0; f_i]}{v_1 - v_0}, \text{ dacă } v_0 \neq v_1$$

— expresia lui $h_2(x_0, x_1, x_2)$, spre exemplu,

$$h_2(x_0, x_1, x_2) = 1 - \frac{[x_0, x_1, x_2; f]f(x_2)}{[x_0, x_1; f][x_1, x_2; f]}$$

se inlocuieşte prin

$$H(x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2) = E_2 - [P_1(x_0, y_0; x_1, y_1)]^{-1}P_2(x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2;)([P_1(x_1, y_1; x_2, y_2)]^{-1} P(x_1, y_1))$$

Cu aceste pregătiri putem trece efectiv la aplicarea metodelor (1.1) — (1.8)' sistemului (2).

Metoda de bază a hiperbolelor secante (1.1) o scriem sub forma

$$[x_n, x_{n+1}; f]h_2(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})\Delta x_n + f(x_n) = 0$$

unde am notat prin $\Delta x_n = x_{n+3} - x_n$, iar apoi, o transpunem pentru sistemul (2).

Avem:

(2.1) $$P_1(x_n, y_n; x_{n+1}, y_{n+1})H(x_n, y_n; x_{n+1}, y; x_{n+2}, y_{n+2})\Delta z_n + P(x_n, y_n) = 0$$

unde am notat prin $\Delta z_n = ((x_{n+3} - x_n, y_{n+3} - y_n))^T$

Metoda modificată a hiperbolelor secante (1.2)' este echivalentă cu relaţia

$$[x_0, x_1; f]h_2(x_0, x_1, x_2)\Delta x_n + f(x_n) - [x_0, x_1, x_2; f](\Delta_0 x_n)([f'(x_1)]^{-1}f(x_n)) = 0$$

care, pentru sistemul (2), devine

$$(2.2)' \quad \begin{aligned} & P_1(x_0, y_0; x_1, y_1)H(x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2)\Delta z_n + P(x_n, y_n) - \\ & - P_2(x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2)(\Delta_0 z_n)([P'(x_1, y_1)]^{-1}P(x_n, y_n)) = \theta \end{aligned}$$

unde am notat prin $\Delta z_n = ((x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n)^T$ şi $\Delta_0 z_n = (x_n - x_0, y_n - y_0)^T$

Metoda de bază a falsei poziţii (1.8) se poate scrie astfel

$$[x_n, \overline{x}_0; f]h_2(x_n, \overline{x}_0, \overline{x}_0)\Delta x_n + f(x_n) = 0$$

iar pentru sistemul (2) devine

$$(2.8) \quad P_1(x_n, y_n; \overline{x}_0, \overline{y}_0)H(x_n, y_n; \overline{x}_0, \overline{y}_0; \overline{x}_0, \overline{y}_0)\Delta z_n + P(x_n, y_n) = \theta$$

unde am notat prin

$$H(x_n, y_n; \overline{x}_0, \overline{y}_0; \overline{x}_0, \overline{y}_0) =$$

$$= E_2 - [P_1(x_n, y_n; \overline{x}_0, \overline{y}_0)]^{-1}P_2(x_n, y_n; \overline{x}_0, \overline{y}_0; \overline{x}_0, \overline{y}_0)([P'(\overline{x}_0, \overline{y}_0)]^{-1}P(x_0, y_0))$$

În mod asemănător se aplică şi celelalte metode iterative.

LA RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON-LINEAIRES PAR DES METHODES ITERATIVES ENGENDREES D'UNE FAMILLE D'HYPERBOLES DU DEUXIEME DEGRE.

(Résumé)

Dans ce travail on donne des nouvelles méthodes iteratives engendre par une famille des hyperboles pour résoudre l'equation scalair $f(x) = 0$, $x \in [\alpha, \beta] \subset R$. Ensuit, elles sont appliqué à la résolution d'une systèmes d'équations nonlineaires.

BIBLIOGRAFIE

1. BALAZS, M., GOLDNER, G., On an analogical iteration method with the method of the tangent hyperboles, Comment. Math. Univ. Carolinae, 9(2), 263–267, 1968.
2. GAIDICI, A., Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metode iterative, teză de doctorat, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1981.
3. ORTEGA, I., M., RHEINBOLDT, W., C., Iterative solution of nonlinear Equations in several variables, Acad. Press., New-York and London, 1970.
4. OSTROWSKI, A., Solution of Equations and Systems of Equations, Wiley, New-York, 1960.
5. TRAUB, J., F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Pretins-Hall, Englewood Cliffs, New-York, 1964.
6. ŞAFIEV, R., A., Ob odnom modificaţii met. casatel. ghiperboli, DAN Azerb., T. 19(1), 3–8, 1963.