CORECŢII DE COMPRESIBILITATE ÎN MIŞCAREA PLANĂ A FLUIDULUI IDEAL; METODA HODOGRAFICĂ APROXIMATIVĂ A LUI S.A. CIAPLÎGHIN

de

LIDIA KOZMA

În această lucrare presupunem fluidul ideal, compresibil animat de viteza V în planul dat de figura 1.

Datorită simetriei configuraţiei, studiem mişcarea numai în semiplanul superior.

Alegerea sistemului de axe este indicată de figura 1.

Pornim de la faptul că se cunoaşte potenţialul mişcării incompresibile în zona dată de figura 1, [1].

Ne propunem să determinăm modificarea configuraţiei Q_i (din planul mişcării incompresibile) în conturul P (din planul compresibil). De asemenea dorim să obţinem valoarea vitezei de mişcare a fluidului pe porţiunea DE, atunci cînd se ia în considerare compresibilitatea fluidului.

În zona DE potenţialul complex $f = \varphi + i\psi$ are expresia:

$$\text{(1)} \qquad \frac{df}{dz_i} = \left[-V_\infty i \frac{\alpha + 1}{\sqrt{\beta + 1}} \cdot \frac{\sqrt{\zeta - \beta}}{\zeta - \alpha} \right]_{\zeta = \xi}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \ \xi \in (\beta, +\infty)$$

Parametrii α, β sînt determinaţi în funcţie de cerinţele reale ale problemei propuse [1]. De asemenea se cunoaşte relaţia de corespondenţă între planul z_i (am notat cu indice i elementele mişcării în planul incompresibil) şi planul (z).

$$\text{(2)} \qquad dz_i = \left(\frac{-2qi}{\pi V_\infty e^{\tau_0}} \cdot \frac{\zeta - \alpha}{(\zeta^2 - 1)\sqrt{\zeta - \beta}} d\zeta \right)_{\zeta = \xi} \quad \text{pe DE.}$$

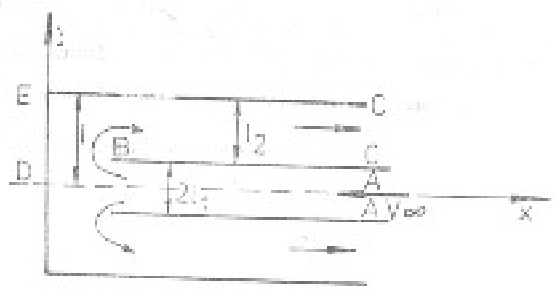

fig. 1.

Relaţia de corespondenţă dintre planul mişcării incompresibile (z_i) şi planul mişcării compresibile (z) este

$$dz = C_1 dz_i + C_2 \overline{\left(\frac{df_i}{dz_i}\right)^2} dz_i \tag{3}$$

Integrînd ecuaţia (3), folosind (1) şi (2) obţinem

$$\begin{aligned} z = C_1 z_i + C_2 \frac{2V_\infty e^{\tau_0} \cdot i}{\pi} \Bigg[& \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta-1}} - \\ & - \frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta+1}} - \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta-\alpha}} + k \end{aligned} \tag{4}$$

unde constanta k de integrare va fi determinată în cele ce urmează.

Alegem k astfel ca $z_D = (z_i)_D = 0$, $\zeta = \xi \to \infty$

Se obţine astfel

$$k = C_2 \left[\frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} - \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1}\right] V_\infty e^{\tau_0} \cdot i. \tag{5}$$

Relaţia de corespondenţă între cele două plane (compresibil şi incompresibil) va deveni

$$\begin{aligned} Z = C_1 z_i + C_2 \frac{2V_\infty e^{\tau_0} \cdot i}{\pi} \Bigg[& \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta-1}} - \\ & - \frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta+1}} - \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\beta-\alpha}} \Bigg] + \\ & = C_2 V_\infty \cdot e^{\tau_0} \cdot i \left[\frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} - \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Analizăm modificarea configuraţiei punctului E ($\zeta = \xi = \beta$). Ştim din lucrarea citată [1] că

$$(z_i)_E = iy_E = i \frac{q}{V_\infty e^{\tau_0}} \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{\beta-1}} + \frac{1+\alpha}{\sqrt{\beta+1}}\right].$$

Punctul E în planul compresibil va fi $z_E = x_E + iy_E = iy_E$. Obţinem

$$\begin{aligned} y_E &= C_1 (y_i)_E + C_2 V_\infty e^{\tau_0} \left[\frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} - \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1}\right] = \\ &= C_1 \frac{q}{V_\infty e^{\tau_0}} \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{\beta-1}} + \frac{1+\alpha}{\sqrt{\beta+1}}\right] + C_2 V_\infty e^{\tau_0} \Bigg[\frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)} - \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1}\Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Pe porţiunea DE vom avea în planul compresibil o variaţie a lui z de la $z_D = 0$ pînă la z_E dat de y_E prin relaţia (7).

Un alt punct care interesează este cel de viteză maximă. În planul incompresibil punctul de viteză maximă, pe care-l notăm $(z_i)_M$ corespunde lui $\zeta = \xi = 2\beta - \alpha$. În planul mişcării compresibile îi va corespunde un punct z_M, care va tot punctul de viteză maximă.

Într-adevăr, din relaţiile dintre vitezele în cele două mişcări [2], relaţii independente de punct se obţine

$$-\frac{1}{V^2}\frac{dV}{dV_i} = -\frac{C_1}{V_i^2} + C_2 \tag{8}$$

unde V = viteză în mişcarea compresibilă, iar V_i = viteza în mişcarea incompresibilă.

$$\frac{dV}{dV_i} = \frac{V^2}{V_i^2}(C_1 - C_2V_i^2) > 0,\ C_2 < 0.$$

Punctul $z_{iM} = y_{iM}$ iar z_M va fi

$$z_M = C_1 i\frac{2q}{\pi V_\infty e^{\tau_0}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}}\right)\frac{1-\alpha}{\sqrt{\beta-1}} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}\right)\cdot\frac{\alpha+1}{\sqrt{\beta+1}}\right] + C_2 iV_\infty e^{\tau_0}\left[\frac{\sqrt{\beta+1}}{\alpha+1}\cdot\right. \tag{9}$$

$$\left.\cdot\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}\right) + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{4(\alpha^2-1)} - \frac{\sqrt{\beta-1}}{\alpha-1}\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}}\right)\right]$$

Viteza maximă în cazul incompresibil era

$$(V_i)_{max} = \frac{V_\infty}{2}\frac{\alpha+1}{\sqrt{(\beta+1)(\beta-\alpha)}}$$

Obţinem viteza maximă în cazul mişcării compresibile

$$V_{max} = \frac{K_1V_\infty}{K_1^2C_1 + V_\infty^2\cdot C_2},\ \text{unde}\ K_1 = \frac{2\sqrt{(\beta+1)(\beta-\alpha)}}{\alpha+1} \tag{10}$$

Comparaţie între elementele mişcării incompresibile şi cele ale mişcării compresibile

Modificarea profilului DE o vom calcula prin raportul

$$r = \frac{(DE)\ \text{compresibil}}{(DE)\ \text{incompresibil}} \tag{11}$$

Obţinem

$$r = C_1 + C_2\frac{V_\infty^2 e^{2\tau_0}}{q}\left[\frac{\frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2(\alpha^2-1)}}{\frac{1-\alpha}{\sqrt{\beta-1}} + \frac{1+\alpha}{\sqrt{\beta+1}}} - \frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\alpha^2-1}\right]. \tag{12}$$

Raportul dintre V_{max} şi $(V_i)_{max}$ va fi

$$\frac{V_{max}}{(V_i)_{max}} = \frac{1}{C_1 + \frac{V_\infty^2}{K_1^2} C_2} \quad \text{sau}$$

(13)

$$V_{max} = \frac{(V_i)_{max}}{C + \frac{V_\infty^2}{K_1^2} C_2}$$

Obţinem astfel o relaţie simplă pentru determinarea vitezei maxime a mişcării compresibile în funcţie de viteza maximă a mişcării incompresibile, precum şi în funcţie de C_1, C_2, constante date în cele trei variante (Ciaplighin-Demcenko ; Kármán-Tsien ; C. Iacob).

Raportul r dat de (12) şi relaţia (13) între viteza se pot exprima în funcţie de numărul M_0 a lui Ciaplighin $M_0 = \frac{V_\infty}{C_0}$ sau numărul Mach M_1 corespunzător vitezei V_∞, între care există relaţia

$$M_0 = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}},$$

unde am notat $M_\infty = M_1$.

Evident, pentru $M_0 = M_1 = 0$ se reobţine cazul incompresibil $r = 1$; $V_{max} = (V_i)_{max}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Lidia Kozma Modelarea matematică a unui proces de aerare (Comunicare la sesiunea ştiinţifică a I.I.S. Baia Mare, 1976).
2. Caius Iacob, „Introduction mathematique à la mècanique des fluides'', 1959.

RESUMÉ

This paper establishes the compressibility corrections in the plane movement of an ideal fluid in a given profile. A.S. Ciaplighin's approximate hodographical method has been used. The relation betweenn the velocities in the two motions as well as the contour modification have been determined.