ASUPRA CONVERGENȚEI UNOR PROCESE ITERATIVE ASOCIATE LA O CLASĂ DE SISTEME LINIARE

de

VASILE BERINDE

Introducere

Rezolvarea numerică a unui însemnat număr de probleme puse de practică revine la găsirea soluției (unice) a unui sistem de n ecuații cu n necunoscute:

$$Au = b \tag{1}$$

Deși literatura dedicată acestui capitol al matematicii este vastă, totuși metodele teoretice „exacte" (Gauss, regula lui Cramer, metoda pivotului, a rădăcinilor pătrate etc.) sînt inutilizabile practic pentru n mare, odată, din cauza necesarului de memorie pe care îl reclamă, apoi, datorită acumulării erorilor de rotunjire care, la sistemele rău condiționate, pot să denatureze rezultatul final.

Metodele iterative au meritul, în ciuda erorilor inerente lor, că înlătură ambele inconveniente ale metodelor exacte, pentru o largă clasă de probleme.

§1. Metode iterative staționare liniare de bază

Scriem sistemul (1), printr-o descompunere regulată a matricii A, în forma redusă

$$u = Gu + k, \tag{2}$$

cu G nesingulară, unde

$$G = I - MA, \quad k = Mb, \quad M \text{ nesingulară.}$$

Atașăm sistemului (2), următoarele procese iterative:

(a) $$u^{(n+1)} = (I - MA)u^{(n)} + Mb$$

(b) $$u^{(n+1)} = Lu^{(n+1)} + Uu^{(n)} + c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

unde: $L + U = I - MA$, $M = D^{-1}$ în (b), iar $D = \operatorname{diag} A$, L, U matricele triunghiulare strict sub — și supra — diagonale.

1°. Dacă în (b) avem, ca înainte, $M = D^{-1}$, atunci

$$I - MA = I - D^{-1}A = D^{-1}(D - A)$$

şi cu L, U avînd aceeaşi semnificaţie, (b) este cunoscuta metodă Gauss-Seidel.

Din metoda (a), prin particularizări, obţinem diverse metode iterative cunoscute.

2°. Luînd $P = -M$, obţinem metoda Richardson staţionară generalizată

$$u^{(n+1)} = R_p u^{(n)} + Pb, \quad \text{unde } R_p = I + PA.$$

3°. Dacă în 2 luăm $P = p\,I$, $p \neq 0$, obţinem metoda Richardson staţionară

$$u^{(n+1)} = R_p u^{(n)} + pb, \quad R_p = I + pA.$$

4°. Dacă în (a) punem $M = D^{-1}$, $D = \operatorname{diag} A$ nesingulară, atunci obţinem metoda Iacobi

$$u^{(n+1)} = Bu^{(n)} + c,$$

unde $B = D^{-1}C$, $c = D^{-1}b$, $C = D - A$.

Observaţii : a) Metoda Iacobi poate fi obţinută şi ca un caz particular al metodei 2; punînd $P = D^{-1}$.

b) Dacă luăm M astfel încît

$$I - M\,A = (I - L)^{-1}\,U,$$

cu notaţiile cunoscute, metoda Gauss-Seidel poate fi obţinută din (a). Această cale nu este însă comodă, deoarece în expresia lui c din (b), apare şi A^{-1}. A — 1 calcula pe A^{-1}, presupune tot atît de mare efort ca şi pentru rezolvarea sistemului (1).

Aplicînd relaxarea metodelor (a) şi (b), obţinem metode iterative care sînt, în general, mai rapid convergente decît primele. O prezentare amănunţită a acestui subiect este făcută în [1]. Noi vom discuta aici numai metoda SOR, obţinută prin relaxarea metodei Gauss-Seidel:

5°. $$u^{(n+1)} = B_\omega u^{(n)} + \omega c$$

unde $B_\omega = \omega B + (1 - \omega)\,I$, unde $\omega \in (0, 2)$ este factorul de relaxare. În §5 vom face cîteva observaţii privind alegerea unei anumite metode iterative, pentru rezolvarea unei probleme date.

§2. Condiţii suficiente pentru convergenţa proceselor iterative

O condiţie suficientă pentru ca un proces iterativ de tipul (a) sau (b) asociat sistemului (2) să fie convergent, este (vezi [6]) ca $\|G\| < 1$, unde $\|\cdot\|$ este o normă canonică oarecare definită peste algebra matricelor.

Ştim că în acest caz ([1], [2], [3], [6]) raza spectrală a lui G este subunitară şi, în concluzie, procesele iterative ataşate sînt convergente.

Condiţia $\|G\| < 1$ este însă foarte restrictivă. Toate normele canonice ale matricii

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 15/4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

sînt supraunitare, deci nu satisfac condiția $\|G\| < 1$; totuși, valorile proprii ale sale sînt $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, deci spectrul lui G este subunitar. Se pune astfel problema găsirii unor criterii mai „slabe" care să fie comod de verificat în practică. Evident, este exclusă determinarea tuturor valorilor proprii ale lui G, operație mult mai laborioasă decît rezolvarea sistemului (2), pentru a verifica faptul că spectrul lui G este subunitar.

În [1] sînt prezentate multe criterii, pentru diferite clase de matrice, dar nici unul dintre ele nu este practic. Vom descrie în cele ce urmează un criteriu care să aibă acest atribut.

§3. Condiții necesare și suficiente pentru convergența proceselor iterative

O condiție necesară și suficientă pentru ca procesele iterative de tipul (a) sau (b) să fie convergente, oricare ar fi alegerea vectorului inițial $u^{(0)}$, este ca raza spectrală a lui G să fie subunitară, [6]. Vrem să cercetăm îndeplinirea acestei cerințe pentru clasa sistemelor liniare, a căror matrice, în forma redusă (2), G, are toate elementele pozitive și, în plus, satisface condiția

$$\|G\|_\infty = 1. \quad (3)$$

Această clasă de sisteme apare, spre exemplu, în rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale prin metoda elementului finit ([7], [8]).

§4. Forma normală Frobenius. Metoda lui Danilevski

Dacă toate elementele unei matrice pătrate sînt pozitive atunci valoarea proprie de modul maxim a sa este pozitivă. (T. Perron, anunț parțial, [6]).

Fie:

$$D(\lambda) = \det\,[G - \lambda I] = 0$$

ecuația caracteristică a matricii G. Dacă $D(\lambda)$ este scris în forma normală Frobenius, atunci

$$D_{(\lambda)} = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n)$$

Din condiția (3) deducem că valorile proprii ale lui G sînt, în modul, cel mult egale cu 1. Pentru a arăta că ecuația $D(\lambda) = 0$ nu admite rădăcina $\lambda = 1$, este suficient să arătăm că $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 1$ (4)

În acest scop, matricea A este adusă la forma normală Frobenius, efectuînd asupra ei transformări care conservă valorile proprii, utilizînd metoda lui Danilevski.

Pentru clasa de sisteme liniare considerate, matricea G este de tip bandă; s-a elaborat un subprogram care aduce matricea G la forma normală Frobenius și verifică condiția (4). Noțiunile cuprinse în acest paragraf sînt prezentate pe larg în [6].

§5. Concluzii

Metoda descrisă aici, pentru verificarea convergenţei unui proces iterativ, este utilă atunci cînd sistemele fac parte dintr-o clasă particulară, des intîlnită în aplicaţii practice, cele cu matricea de tip bandă.

Pentru cazul unei matrice oarecare, deci cu puţine elemente nule, atît memorarea ei cît şi aducerea la forma normală Frobenius, sînt laborioase.

Odată verificată convergenţa procesului iterativ, poate fi aleasă una dintre cele cinci metode descrise în [1]. Dintre toate, metoda SOR, cu ω ales optim, este cea mai rapidă. Noi am preferat o variantă Gauss-Seidel accelerată [7], care este mult mai comod de aplicat (nu trebuie determinat ω optim, ca şi în cazul metodei SOR).

Pentru sistemele liniare cu G matrice tridiagonală, se poate aplica o metodă directă simplă, bazată pe un rezultat recent al lui J. W. Lewi [4].

BIBLIOGRAFIE

1. YOUNG, D. M — Iterative solution of large linear systems, Acad. Press, 1971;
2. VARGA, R. S. — Matrix iterative analysis, Englewood, Cliffs, 1962;
3. HOUSEHOLDER, A. S. — The theory of matrices in numerical methods, Bul. Blaisdell Publishing Company, 1964;
4. LEWIS, J. W. — Inversion of tridiagonal matrices, in Numerische Matematik, 38, 333—345 (1982);
5. WOZNIAKOWSKI, H — Round — off Error Analysis of Iterations of large linear Systems, Numer, Math. 30, 301—314 (1978);
6. Démidovitch, B. S., alţii — Éléments de calcul numerique, MIR, 1973;
7. PETREAN, L., F., BERINDE V. — Influenţa condiţiilor iniţiale ..., Sesiunea a VII-a de comunicări şi referate tehnico-ştiinţifice, 24.01.1981, Baia Mare;
8. PETREAN, L., PETER, D., BERINDE, V. — Asupra erorilor de determinare a cîmpului electric ..., CNNE, 17—18 septembrie 1982, Timişoara, vol. 8, p. 147—152;

ABSTRACT

In this paper, some iterative procedures associated with a class of large liear systems are presented.

F irst, in § 1, we derive, in a unitary manner, five usual iterative methods. Next, in § 2, we resume some basic results in the theory of iterative processes.

Practical criteria, which assure the convergence of the methods, are given in § 3 and § 4. Finally, conclusions on the use of our results are summerized.