ASUPRA n-GRUPURILOR ENTROPICE

de

MARIA S. POP

Studiind congruențele în n-semigrupuri în lucrarea [2] am stabilit că pentru n-grupuri orice sub-n-grup semiinvariant determină o congruență unică astfel încît el să fie o clasă de echivalență în raport cu acea congruență. Pornind de la studiul congruențelor în n-grupuri entropice în prezenta lucrare demonstrăm că subcategoria n-grupurilor entropice este echilibrată.

DEFINIȚIE 1. Operația n-ară definită pe A, ${}_0 : A^n \to A$ se numește entropică dacă pentru orice matrice (a_{ij}) de $n \times n$ elemente $a_{ij} \in A$ avem produsul produselor elementelor liniilor egal cu produsul produselor elementelor coloanelor. Cu alte cuvinte

$$((a_{11}, \ldots, a_{1n})_0, \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})_0)_0 =$$
$$= ((a_{11}, \ldots, a_{n1})_0, \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{nn})_0)_0.$$

Un n-grup $(A, {}_0)$ în care operația „0" este entropică se numește n-grup entropic.

Studiind operațiile n-are entropice, Evans [1] arată că dacă o operație entropică admite element unitate, atunci ea este comutativă, de unde rezultă că pentru $n = 2$ grupurile entropice se identifică cu cele comutative. Totodată, orice operație n-ară asociativă semicomutativă $((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)_0 = (x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1)_0$; $\forall x_i \in A$; $i = 1, \ldots, n)$ și în particular comutativă este entropică, ([3] teorema 1.2.16).

DEFINIȚIE. Sub-n-grupul H al unui n-grup $(A, {}_0)$ se numește semiinvariant dacă pentru orice $x \in A$ avem $(x, H, \ldots, H)_0 = (H, \ldots, H, x)_0$. Pentru simplificarea scrierii vom utiliza pentru egalitatea de mai sus notația $(xH^{n-1})_0 = (H^{n-1}x)_0$.

TEOREMA 1. Orice sub-n-grup H al unui n-grup entropic $(A, {}_0)$ este semiinvariant.

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm matricea

$$\begin{pmatrix} x & H & H & \ldots & H & H \\ \bar{x} & x & x & \ldots & x & H \\ x & \bar{x} & x & \ldots & x & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H & x & x & \ldots & \bar{\bar{x}} & x \end{pmatrix}$$

unde $x \in A$ și $\bar{x}$ este transversala lui x [2].

Aplicind acestei matrici definiţia operaţiei entropice avem

$$((xH^{n-1})_\theta, (\bar{x}, x, x, \dots, x, H)_\theta, \dots, (H, x, x, \dots, \bar{x}, x)_\theta)_\theta =$$
$$= ((x, \bar{x}, x, \dots, H)_\theta, \dots, (H, x, \dots, \bar{x})_\theta, (H^{n-1}x)_\theta)_\theta.$$

Deoarece pentru orice $x \in A$ şi orice poziţie a transversalei $\bar{x}$ în produs avem $(x, \dots, \bar{x}, \dots, x, H)_\theta = (H, x, \dots, \bar{x}, \dots, x)_\theta = H$, egalitatea precedentă poate fi scrisă $((xH^{n-1})_\theta, H^{n-1})_\theta = (H^{n-1}(H^{n-1}x)_\theta)_\theta$. Folosim asociativitatea operaţiei n-are avem $(x(H, \dots, H)_\theta H^{n-2})_\theta = (H^{n-2}(H, \dots, \dots, H)_\theta x)_\theta$. Cum $(H, \dots, H)_\theta = H$ de aici rezultă că $(xH^{n-1})_\theta = (H^{n-1}x)_\theta$ pentru orice $x \in A$, deci H este semiinvariant.

Observaţie. Nu orice sub-n-semigrup entropic este semiinvariant. Spre exemplu dacă A este o mulţime şi operaţia $_\theta : A^n \to A$ se defineşte astfel: $(x_1, \dots, x_n)_\theta = x_1$; $x_i \in A$; $i = 1, \dots, n$, atunci $(A, _\theta)$ este un n-semigrup entropic. Orice element $a \in A$ este idempotent, deci $(\{a\}, _\theta)$ este un sub-n-semigrup al lui A, dar el nu este semiinvariant întrucît $(a, x, \dots, a)_\theta \neq (a, \dots, a, x)_\theta$ pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$.

În lucrarea [2] am demonstrat că în categoria n-grupurilor sub-n-grupurile semiinvariante joacă rolul subgrupului normal din cazul binar:

TEOREMA 2. [2] Dacă $(A, _\theta)$ este un n-grup şi H un sub-n-grup semiinvariant al său, atunci H determină în A o congruenţă unică ρ cu proprietatea că H este o clasă rest în raport cu ρ.

Teoremele 1 şi 2 ne dau următorul

COROLAR. Orice sub-n-grup H al unui n-grup entropic (semicomutativ, comutativ) $(A, _\theta)$ determină o congruenţă unică în A cu proprietatea că H este o clasă rest în raport cu ea.

Corolarul ne indică că teorema similară din cazul grupurilor $(n = 2)$ comutative nu este specifică acestor grupuri ci unei clase mai largi şi anume celor entropice, dar pentru $n = 2$ grupurile entropice se identifică cu cele comutative.

Fie n-Gr categoria ale cărei obiecte sînt n-grupurile iar $Hom_{n-Gr}(A, B)$; $A, B \in Ob$ n-Gr sînt omomorfismele $f : A \to B$. Clasa tuturor n-grupurilor entropice împreună cu clasa tuturor omomorfismelor n-grupale formează o subcategorie a categoriei n-Gr. Spre deosebire de categoria bigrupurilor absenţa elementului unitate în general conduce la afirmaţia că n-Gr nu este o categorie conexă [3]. Corolarul precedent ne permite să demonstrăm

TEOREMA 3. Subcategoria n-grupurilor entropice este echilibrată.

D e m o n s t r a ţ i e. În [3], teorema 1.4.5, am demonstrat că în categoria n-semigrupurilor monomorfismele coincid cu omomorfismele injective. Prin urmare pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că în subcategoria n-grupurilor entropice epimorfismele coincid cu omomorfismele surjective.

Într-adevăr, dacă A şi B sînt n-grupuri entropice şi $f : A \to B$ este un epimorfism cu $f(A) \neq B$, cum $f(A)$ este sub-n-grup al lui B, el determină conform corolarului teoremei 2, n-grupul factor $B/f(A)$, iar $f(A) \in B/f(A)$. Fie aplicaţiile $g, h : B \to B/f(A)$ definite astfel

$$g(x) = (xf(A)^{n-1})_\theta \text{ şi } h(x) = f(A); \ \forall x \in A.$$

Din definiție rezultă că $g \neq h$. Aplicațiile g și h sînt omomorfisme deoarece pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in B$ cum $f(A)$ este sub-n-grup și A, B sînt entropice avem

$$g((x_1, \ldots, x_n)_0) = ((x_1, \ldots, x_n)_0 f(A)^{n-1})_0 =$$
$$= ((x_1, \ldots, x_n)_0 (f(A), \ldots, f(A))_0^{n-1})_0 =$$
$$= ((x_1\ f(A)^{n-1})_0, \ldots, (x_n\ f(A)^{n-1})_0)_0 = (g(x_1), \ldots, g(x_n))_0$$

iar $h((x_1, \ldots, x_n)_0) = f(A) = (f(A), \ldots, f(A))_0 = (h(x_1), \ldots, h(x_n))_0$. Dar $h_0 f(x) = h(f(x)) = f(A) = f((xA^{n-1})_0) = (f(x)\ f(A)^{n-1})_0 = g(f(x)) = g_0 f(x)$, pentru orice $x \in A$. Cum $h \neq g$ aceasta contrazice ipoteza, deci $f(A) = B$ și epimorfismul f este surjecție.

În cazul categoriei n-grupurilor problema „este echilibrată categoria n-Gr"? rămîne deschisă pentru $n \geq 3$.

BIBLIOGRAFIE

1. EVANS, T., Abstract mean values, Duke Mat. J., 30, 1963, nr. 2, p. 331–347.
2. POP, S. MARIA, Congruențe în n-semigrupuri, Bul. St. al I.I.S. Baia Mare seria B, vol. VI, 1981. p. 5–10.
3. POP, S. MARIA, Contribuții la teoria n-semigrupurilor, Teză de doctorat, Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca., 1979.

SUMARY

Studying congruences of entropics n-groups, the author proves that the entropics n-groups subcategory is balanced.