# REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE PRIN METODE ITERATIVE GENERATE DE O FAMILIE DE DREPTE.

de

A. GAIDICI

1. Fie ecuaţia scalară

$$f(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \tag{1}$$

unde $[\alpha, \beta]$ este intervalul în care este separată soluţia simplă $\mathbf{x}^*$ a ecuaţiei (1). Despre funcţia f presupunem că este de clasa $C^{(1)}[\alpha, \beta]$ sau că admite diferenţe divizate de ordinul întîi pe $[\alpha, \beta]$, adică există relaţiile [5]:

$$\left.\begin{array}{l}[u, v; f] = \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}, \text{ dacă } u \neq v \\ {[u, u; f] = f'(u), \text{ dacă } u = v}\end{array}\right\}, \forall\, u, v \in [\alpha, \beta]$$

Mai presupunem că soluţia $x^*$ nu se poate afla exact, ci numai aproximativ, eventual, cu o precizie apriori. Cu alte cuvinte, $x^*$ este limita unui şir de aproximaţii succesive ce rezultă în urma unui proces de iterare.

Aproximarea soluţiei $x^*$ prin metode iterative de tip „drepte" constă în aceea că pe intervalul $[\alpha, \beta]$ curba $y = f(x)$ se înlocuieşte prin dreapta $c = x + ay$. Coeficienţii a şi c se determină prin condiţia ca dreapta şi curba să aibă două puncte în comun (contact 2-punctul). Pornind de la aproximaţiile iniţiale $x_0$ şi $x_1$, aceste metode sînt:

*Metoda de bază a dreptelor secante (sau metoda coardei),*

$$x_{n+2} = x_n - [x_n, x_{n+1}; f]^{-1} f(x_n), \; n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

Metoda modificată a dreptelor secante [4],

$$x_{n+2} = x_n - [x_0, x_1; f]^{-1} f(x_n), \; n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1$'$}$$

*Metoda de bază a dreptelor tangente (sau metoda lui Newton),*

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n), \; n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

Metoda modificată a dreptelor tangente,

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n), \; n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.2$'$}$$

*Metoda de bază a falsei poziţii (sau regula falsă)*,

(1.3) $$x_{n+1} = x_n - [x_n, \bar{x}_0 ; f]^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda modificată a falsei poziţii [1],

(1.3)' $$x_{n+1} = x_n - [x_n, \bar{x}_n ; f]^{-1} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dăm următoarea schemă de clasificare a metodelor iterative staţionare generate de o familie de drepte [2]:

$$\begin{array}{c}
(1.1) \\
\begin{array}{|c|l}
\hline
(x_n, x_{n+1}) & 2 \\
\hline
(x_n ; x_0, x_1) & 1 \\
\hline
\end{array} \\
(1.1)'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(1.2) \\
\begin{array}{|c|l}
\hline
(x_n, x_n) & 2 \\
\hline
(x_n ; x_0, x_0) & 1 \\
\hline
\end{array} \\
(1.2)'
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(1.3) \\
\begin{array}{|c|l}
\hline
(\bar{x}_n, x_0) & 1 \\
\hline
(x_n ; x_0, \bar{x}_0) & 1 \\
\hline
\end{array} \\
(1.3)'
\end{array}$$

Fiecare dreptunghiu conţine elementele (punctele) ce se utilizează la aflarea elementului următor. Cifra din dreapta, 2 sau 1, indică ordinul de convergenţă al metodei respective.

2. În cele ce urmează arătăm modul cum o parte din metodele iterative (1.1) — (1.3)' pot fi aplicate la rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare

(2) $$(f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z),\ f_3(x, y, z))^T = (0, 0, 0)^T,\ (x, y, z) \in I \subset \mathbf{R}^3$$

Despre funcţiile $f_i$, $(i = 1, 2, 3)$, presupunem că sînt continui împreună cu derivatele lor parţiale pe un interval $I \subset R^3$, sau că admite diferenţe divizate (precizate mai jos) pe I. Soluţia $(x^*, y^*, z^*)$ este presupusă simplă şi separată pe I. Ne limităm la sistemul (2) din motive lesene de înţeles. Pentru cazul a m ecuaţii, $m \geqslant 4$, generalizarea este imediată. Menţionăm că metodele ce urmează mai jos conduc la „liniarizarea" sistemului (2). Mai inainte, insă, avem nevoie de semnificaţiile corespunzătoare pentru sistemul (2) a noţiunilor din formulele (1.1) — (1.3)'. În acest scop introducem notaţiile:

$$u = (x, y, z); \quad \theta = (0, 0, 0)^T; \quad P(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))^T$$

Aşadar, sistemul (2) este echivalent cu ecuaţia

(2) $$P(u) = \theta$$

a cărei soluţie $u^*$ dorim s-o găsim prin aproximaţii succesive. Pentru aceasta:

— derivata $f'(x_n)$ se înlocuieşte prin matricea (presupusă nesingulară)

$$P'(u_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} (x_n, y_n, z_n)$$

— diferenţa divizată $[x_n, x_{n+1}; f]$ se înlocuieşte prin matricea

$$P_1(u_n; u_{n+1}; u_{n+2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} [x_n, x_{n+1}; x_n, z_n; f_1][x_n; y_n, y_{n+1}; z_n; f_1][x_n; y_n; z_n, z_{n+1}; f_1] \\ [x_n, x_{n+1}; y_n, z_n; f_2][x_n; y_n, y_{n+1}; z_n; f_2][x_n; y_n; z_n, z_{n+1}; f_2] \\ [x_n, x_{n+1}; y_n, z_n; f_3][x_n; y_n, y_{n+1}; z_n; f_3][x_n, y_n; z_n; z_{n+1}; f_3] \end{pmatrix}$$

unde, spre exemplu, am notat prin

$$[x_n, x_{n+1}; y_n, z_n; f_i] = \frac{f_i(x_{n+1}, y_n, z_n) - f_i(x_n, y_n, z_n)}{x_{n+1} - x_n}, \text{ dacă } x_n \neq x_{n+1} \quad i=1, 2, 3$$

$$[x_n, x_n; y_n, z_n; f_i] = \frac{\partial f_i(x_n, y_n, z_n)}{\partial x}, \text{ dacă } x_n = x_{n+1}$$

Cu aceasta se poate trece efectiv la extinderea metodelor (1.1) — (1.3)' pentru ecuaţia (2). Avem:

*Metoda de bază a dreptelor secante*

(1.1) o scriem mai întîi sub forma echivalentă

$$[x_n, x_{n+1}; f]\Delta x_n + f(x_n) = 0$$

şi pe urmă o transpunem în cazul ecuaţiei (2). Obţinem [6]:

(2.1) $$P_1(u_n; u_{n+1}; u_{n+2})\Delta u_n + P(u_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin

$$\Delta u_n = (x_{n+2} - x_n, \; y_{n+2} - y_n, \; z_{n+2} - z_n)^T$$

*Metoda de bază a dreptelor tangente (1.2)* ia forma [3],

(2.2) $$P'(u_n)\Delta u_n + P(u_n) = \theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin $\Delta u_n = (x_{n+1} - x_n, \; y_{n+1} - y_n, \; z_{n+1} - z_n)^T$

*Metoda modificată a falsei poziţii (1.3)'* devine

(2.3)' $$P(u_n; u_0; u_0)\,\Delta u_n + P(u_n) = \theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde am notat prin $\Delta u_n = (x_{n+1} - x_n, \; y_{n+1} - y_n, \; z_{n+1} - z_n)^T$

În mod asemănător se procedează la transpunerea celorlalte metode iterative pentru rezolvarea prin aproximaţii succesive a sistemului (2).

## BIBLIOGRAFIE


1. GAIDICI, A., Construcţia metodelor de aproximare a rădăcinii unei ecuaţii, Bul. Ştiinţific, Inst. ped. Baia Mare, seria B, Nr. 4, 227–240, 1972.
2. GAIDICI, A., Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metode iterative, teză de doctorat, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1981.
3. KANTOROVICI, L., V., Ometoda Niutona, Tr. Mat. in-ta Steklova, T. 28, 104–144, 1948.
4. LICA, D., K., Analiza funcţională şi rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare, Ed. Ştiinţifică, Chişinău, 1975.
5. OSTROWSKI, A., Solution of Equations and Systems of Equations, Wiley, Ney-York, 1969.
6. SERGHEIEV, A., S., O metode hord, Sib. Mat. J., T. 2(2), 282–289, 1961.


## LA RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON-LINEAIRES PAR DES METHODES ITERATIVES ENGENDREES D'UNE FAMILLE DE DROITES.


(Résumé)

Dans ce travail on montre la facon dont les méthodes classiques iteratives (de corde, de Newton, etc). peut être appliquées à la résolution des systemes d'équations non-lineaires.