Bul.St.Univ.Baia Mare
Seria B,Matematică-Informatică,Vol.VII,Nr.1-2,21-26

UNE GÉNÉRALIZATION DU CRITÈRE DE D'ALEMBERT POUR LES SÉRIES POSITIVES

Vasile BERINDE

Abstract. This paper give a generalization of the well-known ratio test (or D'Alembert's test), for series of positive terms, by introducing a "comparison series" with nonnegative terms. This result solves some undecidable cases in the use of the ratio test and furnishes a necessary and sufficent criterion for the series with positive decreasing terms.

1. Introduction

Dans ce travail, on considère seulement des séries numériques réelles, mais les résultats restent vrais dans le cas général d'une espace de Banach [3].
On appelle <u>série positive</u> (ou à termes positifs) une série qui a tous les termes positifs et non nuls. La série est dite <u>non-négative</u> (ou à termes non-négatifs) si tous ses termes sont non-négatifs et une infinité d'entre eux peuvent être nuls.

Le suivant critére (attribué improprement à D'Alembert, car c'est Cauchy qui l'a énoncé et formulé pour la première fois [4] est fréquemment utilisé dans l'étude de la convergence des séries.

<u>THÉORÈME 1.</u>

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ une série à termes positifs.

1) Supposons qu'il existe $k>0$, telle que

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant k < 1, \text{ pour tout } n \geqslant N \ (N \text{ fixé}).$$

Alors la série est convergente,

2) Si, commencent d'un rang N, on a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1,$$

alors la série est divergente.

Dans les applications est utilisée d'habitude une conséquence de ce resultat

COROLLAIRE 1.

Si dans la série positive $\sum U_n$ le rapport d'une terme au précédent tend vers une limite q,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q,$$

a) si $q<1$, la série est convergente,

b) si $q>1$, la série est divergente;

c) si $q = 1$, il y a doute.

L'indécision du cas c) est générée par le fait qu'il existe en même temps des séries convergentes et divergentes pour lesquelles on obtient q=1. L'exemple classique est donné par le couple: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la première convergente et la deuxième divergente ([6],[7]).

Pour éliminer le doute on utilise d'habitude le critère de Raabe-Duhamel.

Le critére de la racine, bien que'il soit généralment plus fort que celui du D'Alembert, grâce aux inégalitées suivantes[5]:

(1)
$$\liminf \frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant \liminf \sqrt[n]{U_n} \leqslant \limsup \sqrt[n]{U_n} \leqslant \limsup \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

ne s'applique pas dans ce cas à cause de l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1.$$

2. Le critère généralisé de D'Alembert

Dans tout ce qui suit on suppose, sans affecter la généralité des résultats, mais pour simplifier la démonstration, qu'on a N=1.

THÉORÈME 2.

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ une série à termes positifs.

a) Si on peut trouver une série à termes non-négatifs $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, convergente, et un nombre k tel que

(2)
$$\frac{U_{n+1}}{U_n+V_n} \leqslant k<1, \text{ pour tout } n \geqslant N,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ est convergente.

b) Si on peut trouver une série à termes non-négatifs $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ convergente et un nombre N tel que

(i) $U_n > V_n$, pour tout $n \geqslant N$;

(ii) la suite (V_n) est décroissante;

(iii) $\frac{U_{n+1}+V_n-V_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$,

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ est ~~convergente~~. divergente

Preuve.

Pour la démonstration nous utilisons

LEMME 1.

Une série à termes non-négatifs $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ est convergente si et seulement si son terme général peut être écrit sous la forme

(3) $V_n = V'_n - V'_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 1$,

ou $(V'_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs.

Preuve du Lemme.

Si la série $\sum V_n$ este convergente, la suite de ses sommes partielles este bornée, donc il existe $M > 0$ tel que

$$V_1+V_2+\ldots+V_n \leqslant M, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$V'_n = M - V_1 - V_2 - \ldots - V_n.$$

La suite (V'_n) tellement construite est décroissante car

$$V'_n - V'_{n+1} = V_{n+1} \geqslant 0,$$

et ses termes sont positifs.

On obtient facilement la réciproque, en utilisant le fait que la suite (V'_n) est convergente et, d'après (3),

$$\lim_{n\to\infty} (V_1+V_2+\ldots+V_n) = \lim_{n\to\infty} (V'_1 - V'_{n+1}) = V'_1 - \lim_{n\to\infty} V'_{n+1}$$

Le lemme est prouvé.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème ci-dessus.

a) On pose $q = \frac{1-k}{k} > 0$. Alors $k = \frac{1}{1+q}$ qui, remplacé dans (2) nous donne

$$q\, U_{n+1} \leqslant U_n - U_{n+1} + V_n, \text{ pour tout } n \geqslant 1. \qquad (4)$$

D'après le lemme, il existe une suite de nombres positifs $(V'_n)_{n \geqslant 1}$, pour laquelle (3) est accomplie. On en déduit que

$$0 < q\, U_{n+1} \leqslant U_n + V'_n - (U_{n+1} + V'_{n+1}), \quad n \geqslant 1,$$

par conséquent, la suite $(W_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$W_n = U_n + V'_n,$$

est décroissante.
D'autre part, la suite (W_n) a tous ses termes positifs, donc est convergente.

Cela implique que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (W_n - W_{n+1})$$

este convergente.
Écrivons maintenant (3) sous la forme

$$U_{n+1} \leqslant \frac{1}{q} (W_n - W_{n+1}).$$

Il en résulte d'après le critère de comparaison, la convergence de la séris $\sum U_n$.

b) D'après la condition (iii) on obtient

$$U_n - V_n \leqslant U_{n+1} - V_{n+1},$$

d'où découle que la suite $(W'_n)_{n\geqslant 1}$, définie par

$$W'_n = U_n - V_n$$

est croissante. De plus, cette suite a tous les termes strictement positifs, d'après la condition (i).

Cela implique

$$\lim_{n\to\infty} W'_n > 0,$$

c'est-à-dire la série

$$\sum W'_n = \sum (U_n - V_n)$$

este divergente.

Mais la série $\sum V_n$ est convergente, ce qui implique la divergence de la série $\sum_{n=1} U_n$.

REMARQUES.

1) Si dans le théorème précédent on prend comme "série de comparaison" $\sum V_n$, la série nulle, c'est-à-dire

$$V_n = 0, \quad n \geqslant 1,$$

on obtient le critère de D'Alembert;

2) La supériorité du théorème 2 par rapport au critère de D'Alembert est illustré par l'exemple suivant.

Exemple.

Pour étudier la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n = \frac{1}{n^2}$,

on prend

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

qui est une série convergente à termes non-négatifs (en fait positifs).

En appliquant le théorème 2, on a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n + V_n} = \frac{n^2}{2n^2+3n+1} < \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

c'est-à-dire, la série $\sum U_n$ est convergente.

REMARQUES.

1) Le précédent exemple nous indique que le théorème 2 est, en fait, un critère de comparaison, car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1.$$

Dans cette situation on a

$$\frac{1}{2} = \limsup \frac{U_{n+1}}{U_n+V_n} < \liminf \sqrt[n]{U_n} = 1.$$

2) Cependant, la supériorité du théorème 2 par rapport au critère du D'Alembert est surtout théorique, parce qu'il est difficile à trouver, généralement, la série convenable $\sum V_n$.

3. Un critère nécessaire et suffisant

En prenant en considération seulement des séries à termes non-croissants, nous obtenons le résultat suivant:

THÉORÈME 3.

Une série à termes positifs décroissants $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ est convergente si et seulement si, il existe une série à termes non-negatifs convergente $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ telle que la condition (2) soit accomplie pour certains nombres k et N.

Preuve.

La suffisance résulte du théorème 2.

Pour prouver la nécessité on pose

$$V_n = a\,U_n,$$

$a > 0$.

REMARQUE.

Le théorème 3 est énoncé et utilisé dans le travail[1], ou on donne un théorème de point fixe. Autres résultats obtenus par l'auteur en utilisant les théorèmes 2 ou 3 peuvent être trouvés dans [1], [2], [3].

NOTE.

Le théorème 2 a été établi par l'auteur encore de 1985. En publiant ce résultat cette année, 1991, il veut apporter un modeste hommage au célèbre mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789-1857), qui a publié, il y a 170 ans, en 1821, les plus importants résultats dans la théorie des séries [4], parmi lesquelles le critère appellé, par tradition, "du D'Alembert".

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERINDE, V. - Error estimates in the approximation of the fixed points for a class of φ-contractions, Studia Univ. "Babeş-Bolyai" (à paraître);

[2] BERINDE, V. - The stability of fixed points for a class of φ-contractions, Univ. Cluj-Napoca. Preprint Nr.3, 1990, (à paraître),

[3] BERINDE, V. - Abstract φ-contractions which are Picard mappings, Mathematica (Cluj), (à paraître);

[4] CAUCHY, A.L. - Analyse algébrique, Paris, 1821;

[5] KNOPP, K. - Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer Verlag, 1964;

[6] GELBAUM, B.R., OLMSTED, J.M.H. - Counter examples in Analysis, Holden-Day, San Francisco, 1964;

[7] NICOLESCU, M., ş.a. - Analiză matematică, vol. I, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1961.

UNIVERSITY OF BAIA MARE

4800 Baia Mare

ROMANIA