Bul.St.Univ.Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică,Vol.VII,Nr.1-2,55-60

UNE EXTENSION DE LA FORMULE DE NYSTRÖM D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

A. COȚIU

Dans ce travail on donne une extension de la formule de Nyström d'intégration numérique des équations différentielles du premier ordre de la forme $y' = f(x,y)$, dont la solution $y(x)$ satisfait à la condition intiale $y(x_0) = y_0$, où x_0 et y_0 sont des nombres donnés. On détermine aussi le reste dans la formule établie et on donne une évaluation du reste de cette formule. Le reste dans ~~dans~~ la formule établie dans ce travail est de l'ordre de h^8, h étant le pas d'intégration.

1. La forme de la formule d'intégration numérique de Nyström est donnée dans les travaux [2], [4].

On fait l'observation que la formule d'intégration numérique de Nyström est plus commode dans les calculs par rapport à la formule d'intégration numérique d'Adams [4]. Une autre forme de la formule de Nyström est donnée dans le travail [2].

À la base des formules de Nyström et d'Adams se trouve la méthode des différences, ou mieux dit, les formules de Nyström et d'Adams sont fondées sur la formule d'interpolation de Newton [4].

Dans le travail [2], D. V. Ionescu a déterminé le reste dans la formule de Nyström ; on donne aussi une évaluation du reste de cette formule. Le reste dans la formule de Nyström est de l'ordre de h^7, h étant le pas d'intégration. Pour déterminer le reste de la formule de Nyström a été appliquée la méthode de D. V. Ionescu exposée dans le travail [1].

La formule d'intégration numérique de Nyström s'applique pour le calcul de $y(x_6)$, où $x_6 = x_5 + h$ $(x_1 - x_0 = h)$, en supposant que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$, a été calculée, au préalable, avec une grande précision, sur les noeuds $x_1, \dots, x_5$, ces points étant pris en progression arithmétique de raison h $(h > 0)$. Pour le calcul de $y(x)$, sur les noeuds x_i, $i = \overline{1,5}$, on peut employer, par exemple, la méthode d'approximations successives de Picard ou, dans le cas analytique, le développement en série, la limite du reste étant fournie par la méthode des fonctions majorantes.

2. On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x,y), \qquad (1)$$

et nous supposons que sur le domaine (rectangle) D, défini par les inégalités

$$D: \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leq b,$$

où x_0, y_0, a, b sont des constantes réelles données, la fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles continues par rapport à x et y, jusqu'à l'ordre 7. Dans ces hypothèses, l'équation différentielle (1) a la solution unique $y(x)$, qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Supposons que la solution $y(x)$ est définie sur le segment $[x_0, x_0 + a]$ et elle a été calculée, au préalable, par un procédé quelconque, sur les noeuds x_i, $i = \overline{1,6}$, qui sont en progression arithmétique de raison h, où $h = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,6}$, et ces points appartiennent au segment $[x_0, x_0+a]$.

Nous nous proposons d'établir une formule d'intégration numérique pour le calcul de $y(x_7)$, où $x_7 = x_6 + h$; dans la formule obtenue interviennent les noeuds x_i, $i = \overline{0,6}$, et également les valeurs de $y(x)$ sur ces points. La formule obtenue constitue une extension de la formule de Nyström. Dans la formule obtenue on donne, aussi, le reste de la formule, en montrant que le reste est de l'ordre de h^8, h étant le pas d'intégration; on précise le coefficient de h^8 de l'inégalité qui nous donne une évaluation du $|R|$. Pour la résolution des problèmes signalés ci-dessus, nous aurons en attention quelques-uns résultats qui sont présentés dans les travaux [1], [2], [3], [4].

3. Pour établir la formule qui fait l'objet du présent travail, dans l'équation différentielle (1), nous remplaçons y par $y(x)$, et posons $\varphi(x) = f[x, y(x)]$. La fonction $\varphi(x)$ est définie

sur le segment $[x_o, x_o+a]$, et ses valeurs, sur les points x_i, $i = \overline{0,6}$, sont connues. L'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme

$$y' = g(x), \tag{2}$$

et, en intégrant, dans l'égalité (2), entre les limites d'intégration x_5 et $x_7 = x_6 + h$, nous obtenons la formule

$$y(x_7) = y(x_5) + \int_{x_5}^{x_7} g(x)dx. \tag{3}$$

Nous trouverons une valeur approchée, désignée par $\bar{y}(x_7)$, pour $y(x_7)$ (la solution exacte sur le noeud $x_7 = x_6 + h$), si dans l'intégrale du second membre de la formule (3), remplaçons la fonction $g(x)$ par le polynôme d'interpolation $P_6(x)$ de Newton ayant le degré égal à 6 ; ce polynôme, sur les points x_i, $i = \overline{0,6}$, prend les valeurs $g(x_i)$, $i = \overline{0,6}$.

Le polynôme $P_6(x)$ est donné par l'égalité

$$P_6(x) = g(x_6) + \frac{\Delta_1 g(x_5)}{1!h}(x-x_6) + \frac{\Delta_2 g(x_4)}{2!h^2}(x-x_6)(x-x_5) + \ldots +$$
$$\ldots + \frac{\Delta_6\, g(x_o)}{6!h^6}(x-x_6)\ldots(x-x_2)(x-x_1), \tag{4}$$

où $\Delta_i g(x_j)$, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{0,5}$, sont les différences de la fonction $g(x)$ sur les noeuds précisés, et ces différences sont données par les formules suivantes

$$\Delta_1 g(x_5) = g(x_6) - g(x_5),$$
$$\Delta_2 g(x_4) = g(x_6) - 2g(x_5) + g(x_4), \tag{5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_6 g(x_o) = g(x_6) - 6g(x_5) + 15\, g(x_4) - 20\, g(x_3) +$$
$$+ 15\, g(x_2) - 6\, g(x_1) + g(x_o).$$

On vérifie légèrement qu'on a $P_6(x_i) = g(x_i)$, $i = \overline{0,6}$.

En remplaçant, dans la formule (3), sous le signe d'intégration, la fonction $g(x)$ par le polynôme $P_6(x)$, on obtient l'expression de $\bar{y}(x_7)$, par une somme de 8 termes. Si dans les intégrales qui figurent dans le second membre, nous faisons le changement de variable définie par la relation $x = x_6 + hu$, on obtient l'égalité

$$\bar{y}(x_7) = y(x_5) + 2hg(x_6) + \Delta_1 g(x_5)\, h \int_{-1}^{1} u du +$$

$$+ \frac{\Delta_2 g(x_4)}{2!} h \int_{-1}^{1} u(u+1)\, du + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta_6\, g(x_o)}{6!} h \int_{-1}^{1} u(u+1)(u+2)(u+3)(u+4)(u+5) du. \qquad (6)$$

En effectuant les calculs dans le second membre de l'égalité (6), on obtient la formule

$$\bar{y}(x_7) = \bar{y}(x_6 + h) = y(x_5) + h \left[2g(x_6) + \frac{1}{3} \Delta_2 g(x_4) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} \Delta_3 g(x_3) + \frac{29}{90} \Delta_4 g(x_2) + \frac{28}{90} \Delta_5 g(x_1) + \frac{1139}{3780} \Delta_6 g(x_o) \right] \qquad (7)$$

La formule donnée par l'égalité (7) représente une extension de la formule d'intégration numérique de Nyström des équations différentielles de la forme (1).

La formule qui fait l'objet de ce travail s'écrit sous la forme

$$y(x_7) = \bar{y}(x_7) + R, \qquad (8)$$

où $\bar{y}(x_7)$ est donné par l'égalité (7) ; par $y(x_7)$ on désigne la valeur de la solution exacte, $y(x)$, de l'équation différentielle (1), sur le noeud $x_7 = x_6 + h$. La formule écrite sous la forme (8), où $\bar{y}(x_7)$ est donné par l'égalité (7), est la formule d'intégration numérique avec de reste, établie dans le présent travail. Elle constitue une extension de la formule de Nyström avec de reste.

4. Pour déterminer le reste R dans la formule (8), on écrit cette formule sous une autre forme.

En remplaçant dans la formule (7), les différences de la fonction $g(x)$ par les expressions données par l'égalités (5), la formule (8) s'écrit sous la forme

$$y(x_7) = \bar{y}(x_7) + R = y(x_5) + \frac{h}{3780} \left[13\,613\, g(x_6) - \right.$$
$$- 23\,886\, g(x_5) + 41\,193\, g(x_4) - 40\,672\, g(x_3) +$$
$$\left. - 8\,010\, g(x_1) + 1\,139\, g(x_o) \right] + R, \qquad (9)$$

où $x_7 = x_6 + h$, et par R on désigne le reste de la formule.

Pour déterminer le reste dans la formule d'intégration numérique (8) ou (9), on applique la méthode de D.V. Ionescu exposée, en détail, dans les travaux [1], [2], [3]. Cette méthode consiste dans attacher aux segments $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,7}$, les fonctions $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,7}$, qui sont des solutions des équations différentielles

$$\varphi_i^{(8)}(x)=0,\ i=\overline{1,7}, \tag{10}$$

et qui satisfont à des conditions aux limites qui sont bien précisées.

Les hypothèses faites sur la fonction $f(x,y)$, nous assurons que la solution exacte $y(x)$ de l'équation différentielle (1), admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre u, sur le segment $[x_0,x_0+a]$. Les relations (10), nous permettons d'écrire les suivantes sept égalités

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(8)}(x)\,g(x)\,dx=0,\ i=\overline{1,7}$$

En appliquant à la chacune intégrale écrite ci-dessus, la formule généralisée d'intégration par parties, et tenant compte des conditions aux limites relatives aux fonctions $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,7}$, on obtient une formule qui nous permet déduire que le reste dans la formule (8) ou (9) est donné par l'égalité

$$R=\frac{1}{3780}\int_{x_0}^{x_7}\varphi(x)\,y^{(8)}(x)\,dx, \tag{11}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coincide avec les fonctions $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,7}$, sur chacun de segments $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,7}$. On détermine les fonctions $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,7}$, et donc, également la fonction $\varphi(x)$; on montre que la fonction $\varphi(x)$ est positive sur le segment $[x_0,x_7]$; son graphique est symétrique par rapport à la droite ayant l'équation $x=x_3+\frac{h}{2}$. La propriété de la fonction (x) d'être positive sur le segment $[x_0,x_7]$ nous permet de déterminer légèrement le reste dans la formule (8) ou (9); on a

$$R = \frac{y^{(8)}(\xi)}{3780} \int_{x_0}^{x_7} \varphi(x)\, dx, \tag{12}$$

où $\xi \in (x_0, x_7)$.

En tenant compte des expressions des fonctions $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,7}$ on montre qu'on a

$$\int_{x_0}^{x_7} \varphi(x)\, dx = 1107 \quad h^8, \tag{13}$$

et alors la formule (12) s'écrit sous la forme

$$R = \frac{41}{14o}\, y^{(8)}(\xi) h^8, \tag{14}$$

où $\xi \in (x_0, x_7)$.

Pour donner une évaluation de la valeur absolue du reste, dans la formule (8) ou (9), on procède dans la manière suivante: de l'équation (1), par des dérivations successives, nous obtenons les égalités suivantes

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = f_1(x,y) \ ,$$

$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, y' = f_2(x,y),$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$y^{(8)} = \frac{\partial f_6}{\partial x} + \frac{\partial f_6}{\partial y}\, y' = f_7(x,y),$$

les fonctions $f_i(x,y), i = \overline{1,7}$, étant continues sur le rectangle D. Si l'on désigne, sur le rectangle D

$$|f_7(x,y)| \leq F_7 > 0,$$

il résulte qu'on peut écrire

$$|R| \leqslant \frac{41}{14o} F_7 h^8 < 0{,}2929 \cdot F_7 h^8 \tag{15}$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] Ionescu D.V., Cuadraturi numerice, Bucureşti, Editura tehnicǎ, 1957

[2] Ionescu D.V., Restul în formula de integrare numericǎ a lui Nyström, Studii şi cercet.matemat.(Cluj), tomul XIV, nr.1, 1963, 43-48.

[3] Ionescu D.V., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, ediţia a doua, Edit.did.şi ped.Bucureşti, 1972, 221229.

[4] Valiron G., Équations fonctionnelles Applications, deuxième édition, Paris, 1950, 329-330.

POLYTECHNICAL INSTITUTE CLUJ-NAPOCA