Bul-St.Univ.Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, Vol. VII, Nr. 1-2, 75-79

OBSERVATIONS SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS BIDIMENSIONELLES CONTINUES

Dan BĂRBOSU

Si $I \subset R \times R$ est un intervalle bidimensionel, $P(x,y)$, $P'(x',y')$ deux points de l'intervalle I et $f: I \to R$, nous marquons par $\Delta f(x,y;\ x',y') = f(x',y') - f(x',y) - f(x,y') + f(x,y)$ la différence bidimensionelle de la fonction f sur l'intervalle bidimensionel $[PP']$.

On dit que la fonction $f: I \to R$ est bidimensionelle continue en $(x,y) \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x' \to x \\ y' \to y}} f(x,y;\ x',y') = 0$

Si f est bidimensionelle continue dans chaque point de l'intervalle bidimensionel I on dira que la fonction f est bidimensionel continue sur l'intervalle I.

Nous allons noter par $C_b(I)$ la multitude des fonctions bidimensionelles continues sur l'intervalle I.

La fonction $k: I \to R$ s'appelle constante bidimensionelle (hyperbolique) sur l'intervalle bidimensionel I si elle est de la forme $k(x,y) = k_1(x) + k_2(y)$ $(\forall)(x,y) \in I$.

La multitude des constantes bidimensionelles nous la marquons par $K_b(I)$.

Elle est immédiate:

<u>Théorème 1</u>: $k \in K_b(I) \iff \Delta k(x,y;\ x'y') = 0,$ $(\forall)(x,y),(x'y') \in I.$

M. Nicolescu démontre en [4] que si f est bidimensionelle continue en $(x_0,y_0) \in I$, alors elle admet la représentation $f(x,y) = g(x,y) + k(x,y)$, où g est continue en sens usuel en (x_0,y_0) et $k\in K_b(I)$.

Nous marquons par:

$$C_{b,k}(I)=\{f\in C_b(I) \mid (\exists)g\in C(I),\ k\in K_b(I): f(x,y)=k(x,y)+g(x,y)\}$$

Evidemment $C_{b,k}(I)\subset C_b(I)$, l'inclusion étant stricte (4).

Le but de cette note est de présenter des théorèmes d'approximation du type Weierstrass pour les fonctions $f\in C_{b,k}(U)$, où $U=[0,1]\times[0,1]$ est le carré unité.

A une fonction $f\in C_{b,k}(U)$ nous associons l'operateur:

$$(1)\quad P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} w_{m,k}(x,\alpha)\,w_{n,l}(y,\beta)\left[g\left(\frac{k}{m},y\right)+g\left(x,\frac{l}{n}\right)-g\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)\right]$$

où:

$$(2)\quad w_{m,k}(x,\alpha)=\binom{m}{k}\frac{x(x+\alpha)\ldots[x+(k-1)\alpha](1-x)(1-x+\alpha)\ldots[1-x+(m-k-1)\alpha]}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+(m-1)\alpha)}$$

$$(3)\quad w_{n,l}(y,\beta)=\binom{n}{l}\frac{y(y+\beta)\ldots[y+(l-1)\beta](1-y)(1-y+\beta)\ldots[1-y+(n-l-1)\beta]}{(1+\beta)(1+2\beta)\ldots(1+(n-1)\beta)}$$

Les polynômes (2) et (3) ont été introduits par D.D.Stancu en (5). Les paramètres α et β qui interviennent dans les expressions (2) et (3) sont non-négatifs, le premier pouvant dépendre seulement de m et le deuxième seulement de n.

<u>Théorème 2</u>: Si:

i) $f\in C_{b,k}(U)$

ii) $0\le\alpha=\alpha(m)\to 0,\quad 0\le\beta=\beta(n)\to 0\quad (m,n\to\infty)$

alors la suite d'opérateurs $\left\{P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)\right\}_{\substack{m\in N\\ n\in N}}$ ayant le terme général exprimé par (1) converge uniformément vers f.

<u>Demonstration:</u>

Il est à observer que le terme général de la suite peut être représenté sous la forme:

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} w_{m,k}(x,\alpha).w_{n,l}(y,\beta).\left[f(x,y)-\Delta f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n};x,y\right)\right]$$

Etant donné que $f\in C_{b,k}(U)$, existe $g\in C(U)$ et $k\in K_b(U)$ de manière que $f(x,y)=g(x,y)+k(x,y)$, $(\forall)(x,y)\in U$.

En tenant compte de la théorème 1 on obtient la representasion:

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)=k(x,y)\cdot\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\cdot W_{n,\ell}(y,\beta)+P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(g;x,y).$$

Conformement à la condition ii) de l'hypotese et à relations (2) et (3) il est evident que

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\cdot W_{n,\ell}(y,\beta) \rightrightarrows 1.$$

Reste à demontrer que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(g;x,y)\rightrightarrows g(x,y)$.

Ayant en vue que $g\in C(U)$ pour démontrer l'affirmation précédente on peut appliquer la théorème de Bohman-Korovkin, conformement à laquelle il est suffisant de demontrer que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(e_{ij}\ ;x,y)\rightrightarrows e_{ij}(x,y)$, les fonctions test e_{ij} etant données par les relations

$$e_{ij}(x,y) = x^i y^j \quad , \ 0\leq i+j\leq 2.$$

On constate facilement que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(e_{ij}\ ;x,y)\rightrightarrows e_{ij}(x,y)$ pour $(i,j)\in\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (0,2)\}$. Pour démontrer que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(e_{11}\ ;\ x,y)\ \rightrightarrows e_{11}(x,y)$ on observe l'inégalité

$$\left|P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(e_{11}\ ;x,y)-\ e_{11}(x,y)\right|\leq\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\cdot W_{n,\ell}(y,\beta)\left|\frac{k}{m}-x\right|\left|\frac{\ell}{n}-y\right|.$$

D'ici, avec un raisonnement similaire à celui utilisé par E.Dobrescu et I.Matei dans (2) on deduit que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(e_{11}\ ;x,y)\rightrightarrows e_{11}(x,y)$. Conformement à la théorème de Bohman-Korovkin pour fonctions de deux variables, il résulte que $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(g;x,y)\rightrightarrows g(x,y)$.

En tenant comte de l'observation on obtien faite au commencement de la démonstration on obtien que

$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)\rightrightarrows k(x,y)+g(x,y)=f(x,y)$, $(\forall)(x,y)\in U$.

Un cas particulier remarcable est constitué par:

<u>Théorème 3</u>: Si $f\in C_{b,k}(U)$, alors la suite des operateurs $\{B_{m,n}(f;x,y)\}_{\substack{m\in N\\ n\in N}}$ de terme générale:

$$(4)\ B_{m,n}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{\ell}x^k\cdot(1-x)^{m-k}\cdot y^{\ell}\cdot(1-y)^{n-\ell}\cdot\left[f\left(\frac{k}{m},y\right)+f\left(x,\frac{\ell}{n}\right)-f\left(\frac{k}{m},\frac{\ell}{n}\right)\right]$$

converge uniformément vers f.

<u>Demonstration:</u> Il est suffisant d'observer que

$B_{m,n}(f;x,y) = P^{[c,d]}_{m,n}(f;x,y)$.

<u>Observations:</u>

i) E.Dobrescu et I.Matei démontrent en (2) que si $f\in C_b(U)$ et si elle est avec la variation bidimensionelle bornée dans U (c'est-à-dire que $\Delta f(x,y;x',y')$ est bornée en U) alors la suite $\{B_{m,n}(f;x,y)\}_{m\in N,\, n\in N}$ de terme général (4) converge uniformement vers f sur U. Leur demonstration utilise de propriétés des coefficients $\binom{m}{k}$, $\binom{n}{\ell}$, en imitant en essence la demonstration, donnée par Berustein, à la théorème classique d'approximation de Weierstrass

ii) Une démonstration directe de la théorème 3 utilise la théorème de Bohman Korovkin. Cette démonstrakion est évidemment différent de la demonstration de (2).

iii) Ayant en vue que par la transformation définie par les équations: $u = \frac{x-a}{b-a}$, $v = \frac{y-c}{d-c}$, l'interval bidimensionel $I = [a,b]\times[c,d]$ se transforme en $U = [0,1]\times[0,1]$ on obtient la réformulation suivante de la théorème 3:

<u>Théorème 4:</u> Si $I = [a,b]\times[c,d]$, $f\in C_{b,k}(I)$ alors la suite d'opérateurs $\{L_{m,n}(f;x,y)\}_{m\in N,\, n\in N}$ de tèrme générale:

$$(5)\ L_{m,n}(f;x,y)=\frac{1}{(b-a)^m(d-c)^n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{\ell}(x-a)^k\cdot(b-x)^{m-k}\cdot(y-c)^{\ell}\cdot(d-y)^{n-\ell}\left[f\left(k\cdot\frac{b-a}{m},y\right)+f\left(x,\ \ell\cdot\frac{d-c}{n}\right)-f\left(k\frac{b-a}{m},\ \ell\cdot\frac{d-c}{n}\right)\right]$$

converge uniformement vers f.

Il est evident qu'une réformulation analogue de la théorème 2 a lieu, réformulation que nous ne donnons pas ici par suite de l'expression plus compliquée de $L_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)$.

T.Mureşan introduit dans (3) la notion de fonction N - dimensionelle continue et avec la variation N - dimensionelle bornée.

Avec une démonstration pareille à celle de la théorème 2 a lieu:

Théorème 5: Si $f \in C_{b,k}(U^N)$, alors f est la limite d'une suite d'opérateurs du type Stancu-Bernstein.

Nous mentionnons que les opérateurs qui interviennent dans la théorème 5 constituent l'extension a N-variables des opérateurs qui interviennent dans la théorème 2.

Bibliografie

1. K.Bögel, Mehrdimensionale Diferentiation von Functionen mehrer Veränderlichen, "Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd.17o, 1934, pag.197-217.
2. E.Dobrescu, I.Matei, Aproximarea prin polinoame de tip Bernstein a funcţiilor bidimensional continue, "Analele Universităţii din Timişoara", seria ştiinţe matematice-fizice, vol. IV, 1966, pag.85-9o.
3. T.Mureşan, Contribuţii în analiza numerică globală (rezumatul tezei de doctorat), Cluj-Napoca, 1984.
4. M.Nicolescu, Contribuţii la o analiză de tip hiperbolic a planului, "Studii şi cercetări matematice", III, nr. 1-2 (1952), pag. 7-51.
5. D.D.Stancu, Aproximarea funcţiilor de două şi mai multe variabile prin operatori de tip Bernstein, "Studii şi cercetări matematice", tom 22, nr. 2 (197o), pag. 335-345.

UNIVERSITY OF BAIA MARE

4800 Baia Mare

ROMANIA