Bul.Şt.Univ.Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică,Vol.VII,Nr.1-2,97-102

SUR LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

A.GAIDICI

1.On considère la fonction $f:]a,b[\longrightarrow R,]a,b[\subset R$, ou $f\in C^{(s)}]a,b[$.

Soit F la réciproque de f,c'est-à-dire (c.a.d.)

$F(f(x)) = x,\ (\forall)x\in]a,b[$.

Pour trouver une solution x^* d'équation

(1) $f(x) = 0,\ (\forall)x\in]a,b[$,

dans l'ouvrage [1] on applique la méthode d'itération ayant l'ordre de convergence $s,(s\in N, s\geq 2)$,

(2) $x_{n+1} = E_s(x_n),\ n = 0,1,2,\dots$

où nous avons noté (:=) par

$$(3)\quad E_s(x) := x - \sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{j-1}\frac{F^{(j)}(y)}{j!}f^j(x),\ y := f(x),\ (\forall)x\in]a,b[$$

parce que:

1) $x^* = F(f(x^*))$ et $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = F(0)$

et la formule de Taylor,

$$2)\quad F(0) = F(y) - \frac{y}{1!}F'(y) + \frac{y^2}{2!}F''(y) + \dots + (-1)^{s-1}\frac{y^{s-1}}{(s-1)!}F^{(s-1)}(y) + R_s(y)$$

on a $F(0) = E_s(x^*)$, c.a.d. $x^* \cong E_s(x^*)$

Dans [1] on considère que l'expression (3) appartient à Bernoulli;dans la littérature russe elle envisage à Tchbychef.Dans le même ouvrage [1] on démontre que (3) vérifie la relation

$$(4)\quad E_{s+1}(x) = E_s(x) - \frac{u(x)}{s}E'(x),\ (\forall)x\in]a,b[\ ,\ \text{où}\ \ u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}\ .$$

2.Dans cet ouvrage nous considérons l'expression (5) plus générale que (3) et démontrons qu'elle vérifié une relation ressemblant à (4).

Dans ce but prenons le parramètre $p\in N$ et soit

$$(5)\quad E_{s,p}(x) := \frac{1}{p!}\Big[F^{(p)}(y) - \sum_{j=1}^{s-(p+1)}(-1)^{j-1}\frac{F^{(j+p)}(y)}{j!}f^j(x)\Big],\ s,p\in N, p<s, s\geq 2$$

Evidement,pour $p = 0$,l'expression (5) devient (3),$E_{s,0}(x) = E_s(x)$,et on va démontrer que (5) vérifié la relation (6), plus générale que (3).

$$(6)\qquad E_{s+1,p}(x) = E_{s,p}(x) - \frac{u(x)}{s-p} E'_{s,p}(x) \ , \text{ si } \ s > p$$

et

$$(7)\qquad E_{p+1,p}(x) = \frac{F'(y)}{p} E'_{p,p-1}(x) \qquad , \text{ si } \ s = p$$

Pour cela nous avons besoin des deux propositions suivantes:

1. Si l'on désigne par

$$(8)\qquad Y_{j,p}(x) := (-1)^{j-1} \frac{F^{(j+p)}(y)}{j!} \ , \ j = \overline{1, s-(p+1)}, \ (\forall) x \in [a,b] \ ,$$

alors on a la relation

$$(9)\qquad (j+1)\, Y_{j+1,p}(x)\, y' + Y'_{j,p}(x) = 0 \ , \text{ où } \ y' := f'(x), \ (\forall) x \in [a,b]$$

Ce résultat s'obtient tout de suit par la dérivation de (8) et tient compte de l'égalité

$$\frac{(-1)^{j-1}}{j!} = -(j+1) \frac{(-1)^{j}}{(j+1)!} \ , \ j = 1,2,\ldots$$

2. Si l'on désigne par

$$(10)\qquad Z_{j,p}(x) := Y_{j,p}(x)\, f^{j}(x), \ j = \overline{1, s-(p+1)} \ , \ (\forall) x \in [a,b] \ ,$$

alors on a la relation

$$(11)\qquad (j+1)\, Z_{j+1,p}(x) - j\, Z_{j,p}(x) + u(x)\, Z'_{j,p}(x) = 0 \ , \ (\forall) x \in [a,b] \ .$$

En effet, il résulte de la formule (10) que

$$(12)\qquad Z'_{j,p}(x) = Y'_{j,p}(x)\, f^{j}(x) + j\, Y_{j,p}(x)\, f^{j-1}(x)\, f'(x) \ ,$$

là où nous remplaçons $Y'_{j,p}(x)$ de (9), en multipliant le résultat par $u(x)$ et c'est (11).

Passerons à démontrer les relations (6) et (9):

1°) D'une part, de la relation (11) il en résulte que

$$\sum_{j=1}^{s-(p+1)} (j+1)\, Z_{j+1,p}(x) - \sum_{j=1}^{s-(p+1)} j\, Z_{j,p}(x) + u(x) \sum_{j=1}^{s-(p+1)} Z'_{j,p}(x) = 0$$

où

$$(s-p)\, Z_{s-p,p}(x) - Z_{1,p}(x) + u(x) \sum_{j=1}^{s-(p+1)} Z'_{j,p}(x) = 0$$

mais

$$Z_{1,p}(x) - Y_{1,p}(x)\ f(x) = u(x)\ Y_{1,p}(x)\ f'(x) = u(x)\ F^{(1+p)}(y)\ f'(x)$$

et comme

$$(s-p)\ Z_{s-p,p}(x) = u(x)(F^{(1+p)}(y)\ f'(x) - \sum_{j=1}^{s-(p+1)} Z'_{j,p}\ (x))$$

en utilisant (5), on obtient:

$$(s-p)\ Z_{s-p,p}(x) = u(x)\ E'_{s,p}(x)$$

D'autre part, du même (5) il en obtient encore

$$p!(E_{s,p}(x) - E_{s+1,p}(x)) = Z_{s-p,p}(x)$$

et en comparant les deux dernières relations il en résulte (6).

2°) De la relation (5) nous avons

$$E_{s,p-1}(x) = \frac{1}{(p-1)!}(F^{(p-1)}(y) - \sum_{j=1}^{s-p}(-1)^{j-1}\ \frac{F^{(j+p-1)}(y)}{j!}\ f^{j}(x))$$

d'où, pour $s = p$, on obtient:

$$E_{p,p-1}(x) = \frac{1}{(p-1)!}\ F^{(p-1)}(y)$$

et

$$E'_{p,p-1}(x) = \frac{1}{(p-1)!}\ F^{(p)}(y)\ f'(x)$$

D'autre part, de même (5) donne encore

$$E_{p+1,p}(x) = \frac{1}{p!}\ F^{(p)}(y)$$

et en comparant les deux dernières relations il en résulte (7).

On remarque que pour $p = 0$ en (6) on obtient (4).

A la suite on montre que $E_s(x) - x$ peut-être exprimé à l'aide des expressions $E_{s,p}(x)$, c.a.d.

$$(13)\quad E_s(x) = x - \sum_{p=1}^{s-1} E_{s,p}(x)\ f^{p}(x),\ (\forall)x \in [a,b]$$

Considérant en détail l'expression (3), on a

$$(14)\quad E_s(x) = x - (\frac{F'(y)}{1!}\ f(x) - \frac{F''(y)}{2!}\ f^{2}(x) + \dots + (-1)^{s-2}\ \frac{F^{(s-1)}(y)}{(s-1)!}\ f^{s-1}(x))$$

Si l'on tient compte de (5) pour $p = 1,2,\dots,s-1$, alors on a:

$$E_{s,1}(x)\ f(x) = \frac{F'(y)}{1!}\ f(x) - \sum_{j=1}^{s-2}(-1)^{j-1}\ \frac{F^{(j+1)}(y)}{1!j!}\ f^{j+1}(x)$$

$$E_{s,2}(x)\, f^{2}(x) = \frac{F''(y)}{2!}\, f^{2}(x) - \sum_{j=1}^{s-3} (-1)^{j-1}\, \frac{F^{(j+2)}(y)}{2!\,j!}\, f^{j+2}(x)$$

(15) ....

$$E_{s,s-1}(x)\, f^{s-1}(x) = \frac{F^{(s-1)}(y)}{(s-1)!}\, f^{s-1}(x)$$

Par l'addition de (14) et (15), remarquons que le coefficient de $\frac{F^{(m)}(y)}{m!} f^{m}(x)$, $m = \overline{1,s-1}$, est

$$(-1)^{m} (C_m^0 - C_m^1 + \dots + (-1)^{m} C_m^m) = (-1)^{m} (1 + (-1))^{m} = 0$$

donc

$$E_s(x) + E_{s,1}(x)\, f(x) + \dots + E_{s,s-1}(x)\, f^{s-1}(x) = x$$

Pour avoir une image plus claire sur les expressions $E_{s,p}(x)$ mettons dans le suivant tableau

s \ p	0	1	2	...	p	...	s-1
0	1	0	0		0		0
1	E_1	1	0		0		0
2	E_2	$E_{2,1}$	1		0		0
...	...	...	...	...	...	...	...
s	E_s	$E_{s,1}$	$E_{s,2}$		$E_{s,p}$		$E_{s,s-1}$

Conclusions:

1) Les éléments de la colonne 0, $E_s = E_{s,0}$, sont les polynômes de Bernoulli, ils vérifient la relation de recurence (5);

2) Les éléments de la colonne p, $E_{s,p}$, sont des généralisations de ces polynômes et ils vérifient les relations de recurence (6) et (7);

3) Avec l'aide des expressions du tableau, nous obtenons des méthodes itératives de paraboles tangentes, qui peuvent être appliqué à la résolution d'équation (1) ainsi:

- les méthodes itératives de base ayant l'ordre de convergence s, ($s \geq 2$), on les obtient à l'aide des expressions E_s,

(16) $x_{n+1} = E(x_n)$, $n = 0,1,2,\dots$

ce résultat coïncide avec [2];

- les méthodes itératives modifiée correspondantes à celles de base, on les obtient avec l'aide des expressions des autres colonnes [3],

$$x_{n+1} = x_n - \sum_{j=1}^{s-1} E_{s,j}(x_0)\, f^j(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

3. Applications.

1) Pour $s = 2$ on obtient

$$E_2(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et

$$x_{n+1} = E(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots$$

est la méthode connue de Newton et respectivement,

$$E_{2,1}(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - E_{2,1}(x_0)\, f(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots$$

est la méthode modifiée.

2) Pour $s = 3$ on obtient

$$E_3(x_n) = E_2(x_n) - \frac{1}{2} u(x_n)\, E_2'(x_n)$$

où

$$E_3(x_n) = x_n - \left(1 + \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et

$$x_{n+1} = E_3(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots$$

est la méthode de base des paraboles tangentes et respectivement,

$$x_{n+1} = x_n - (E_{3,1}(x_0) + E_{3,2}(x_0) f(x_n)) f(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots$$

est la méthode modifiée des paraboles tangentes [4].

BIBLIOGRAPHIE

1. TRAUB, J., F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Pretince-Hall, Englewood Cliffs, New-York, 1964.
2. SCHRODER, E., Uber unendlich vile Algoritmen zur Aflösung der Gleichungen, Math. Annal., 317-365, 1878.
3. GAISICI, A., Rezolvarea ecuatiilor prin metode iterative, Teza de doctorat, Univ. Cluj, 1981.
4. SAFIEV, R., A., Ob odnoi modificatii met.casat.ghip., DAN Azerb., T 19(1), 3-8, 1963.

Abstract

In this paper presents some generalisations of Bernoulli's polynominals. Furter-

more, the results obttained are applied to the construction of the iterative methods used in solving a given equation.

UNIVERSITY OF BAIA MARE
4800 Baia Mare
ROMANIA