Bul.St.Univ.Baia Mare
Seria B,Matematică-Informatică,Vol.VII,Nr.1-2,103-108

QUELQUES GENERALISATIONS DES POLYNOMES DE BERNOULLI

A. GAIDICI

1. On considère les éléments suivants du système $(S)=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]\subset R$ de $(n+1)$ points différents ou non et une fonction réelle $f:[a,b]\longrightarrow R$, dont on suppose être continue et inversable sur $[a,b]$, qui admet des différences divisées jusqu'à l'ordre s, $(s\in N, s\geq 2)$ sur (S), lorsque les points sont distincts, ou qu'elle admet des dérivées jusqu'à l'ordre s si les points de (S) sont confondus en x_0, par exemple.

Définition 1. On appelle différence divisée de premier ordre sur le système (S), les expressions ([4], [5]):

$$[x_i,x_j;f]:=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}\ ,\quad \text{si } x_i\neq x_j;\ i,j=\overline{o,s}$$

et

$$[x_i,x_j;f]:=\frac{f'(x_i)}{1!},\qquad \text{si } x_i=x_j;\ i,j=\overline{o,s}$$

Définition 2. Les différences divisées d'ordre deux de la fonction f sur le système (S) sont, par définition, les différences divisées des différences divisées de premier ordre, c'est-à-dire les expressions:

$$[x_i,x_j,x_k;f]:=\frac{[x_j,x_k;f]-[x_i,x_j;f]}{x_k-x_i}\ ,\text{si } x_i,x_j,x_k-\text{ distinguées};\ i,j,k=\overline{o,s}$$

et

$$[x_i,x_j,x_k;f]:=\frac{f''(x_i)}{2!}\ ,\qquad \text{si } x_i=x_j=x_k;\ i,j,k=\overline{o,s}$$

où

$$[x_i,x_k;[x_j,x;f]]=\frac{[x_j,x_k;f]-[x_j,x_i;f]}{x_k-x_i}\ ,\text{si } x_i,x_j,x_k-\text{ distinguées};\ i,j,k=\overline{o,s}$$

et

$$[x_i,x_k;f']=\frac{f''(x_i)}{2!}\ ,\qquad \text{si } x_i=x_k;\ i,k=\overline{o,s}$$

Définition 3. Les différences divisées d'ordre p, $(2 \le p \le n, p \in N)$, de la fonction f sur le système (S) sont, par définition, les différences divisées des différences divisées d'ordre p-1, c'est-à-dire les expressions:

$$\underbrace{[x_i, x_j, x_k, \ldots, x_l, x_m; f]}_{(p+1)\text{-points}} := \frac{[x_j, x_k, \ldots, x_m; f] - [x_i, x_j, \ldots, x_l; f]}{x_m - x_i}, \text{ si les points sont distincts}$$

et

$$[x_i, x_j, x_k, \ldots, x_l, x_m; f] := \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!}, \text{ si les points sont confondus}$$

Pour la fonction F, l'inverse (la réciproque) de f, c.a.d. $F(f(x)) = x, (\forall) x \in [a,b]$, sont vraies les formules [4]:

$$[y_i, y_j; F] = \frac{1}{[x_i, x_j; f]}, \qquad \text{si } x_i \neq x_j, \text{où } y_i := f(x_i), y_j := f(x_j)$$

et

$$[y_i, y_j; F] = F'(y_i) = \frac{1}{f'(x_i)}, \qquad \text{si } x_i = x_j ;\ i,j = \overline{0,n}$$

$$[y_i, y_j, y_k; F] = -\frac{[x_i, x_j, x_k; f]}{[x_i, x_j; f][x_i, x_k; f][x_j, x_k; f]}, \text{ si } x_i, x_j, x_k \text{ sont distincts}$$

et

$$y_i, y_j, y_k; F = -\frac{f''(x_i)}{f'^3(x_i)}, \qquad \text{si } x_i = x_j = x_k ;\ i,j,k = \overline{o,s}$$

Dans l'ouvrage [3], (en ce tom), nous avons abordé les polynômes de Bernoulli dans la circonstance de l'utilisation des dérivées. Mais, considérant les différences divisées plus générales que les dérivées d'une fonction, on pose le problème de trouver des expressions analogues pour les polynômes de Bernoulli en remplaçant le rôle des dérivées avec celui des différences divisées.

2. Pour la résolution de l'equation

(1) $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$,

avec des approximations initiales x_o, x_1 de la solution x^o, peut être appliquée la méthode d'itération

(2) $x_{n+2} = x_n - [x_n, x_{n+1}; f]^{-1} f(x_n), \ n = 0,1,2,\ldots$

que nous écrivons

(3) $x_{n+2} = E_2(x_n, x_{n+1})$, où $E_2(x_n, x_{n+1}) := x_n - [y_n, y_{n+1}; F]\ y_n$, $n = 0,1,2\ldots$

et qu'elle a l'ordre de convergence 2,[1],[6].

Pour une méthode d'itération, ayant l'ordre de convergence s, ($s \in N$, $s \geq 2$),

(4) $x_{n+s} = E_s(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1})$, $n = 0,1,2,\ldots$

nous sommes conduits à considérer l'expression

(5) $$E_s(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1}) := x_n - \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{j-1} [y_n, \ldots, y_{n+j}; F]\ y_n \cdots y_{n+j-1}$$

que nous applelons l'analogue des polynômes de Bernoulli.

Evidemment, pour le cas où les points (noeuds) coïncident, (5) devient

$$E_s(x_n) := x_n - \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{j-1} \frac{F^{(j)}(y_n)}{j!} f^{j}(x_n)$$

ce qu'on appelle les polynômes de Bernoulli [6].

Remarque. Pour simplifier lécriture, on remplace les points $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1}$ par les points $x_o, x_1, \ldots, x_{s-1}$.

Démontrons que pour (5) est vaie la relation de recurence

(6) $E_{s+1}(x_o, x_1, \ldots, x_s) = E_s(x_o, x_1, \ldots, x_{s-1}) - u(x_{s-1}, x_s)\,[x_{s-1}, x_s; E_s]$

où on a posé

$$u(x_{s-1}, x_s) := \frac{f(x_{s-1})}{[x_{s-1}, x_s; f]}$$

En effet, utilisant (5), on obtient:

$$E_s(x_o, x_1, \ldots, x_{s-1}, x) = E_{s-1}(x_o, x_1, \ldots, x_{s-1}) - (-1)^s [y_o, y_1, \ldots, y_{s-1}, y; F]\, y_o \cdots y_{s-2}$$

pour la quelle nous calculons la différence divisée

$$[x_{s-1}, x_s; E_s] = -(-1)^s\ y_o y_1 \cdots y_{s-2} [y_o, y_1, \ldots, y_s; F]\,[x_{s-1}, x_s; f]$$

puis

$$E_{s+1}(x_o, \ldots, x_s) = E_s(x_o, \ldots, x_{s-1}) + (-1)^s\ y_o, \ldots, y_s; F\ \ y_o y_1 \cdots y_{s-1}$$

et de ces deux dernières relations découle l'égalité (6).

Nous allons à présent voir une expression plus générale que les polynômes (5), posant

$$(7)\quad E_{s,p}(x_o,\dots,x_{s-1}):=[y_o,\dots,y_p;F]-\sum_{j=1}^{s-(p+1)}(-1)^{j-1}[y_o,\dots,y_{j+p};F]\,S_j$$

où $p,s\in N, p<s$, $s\geq 2$ et par $S_1,S_2,\dots$, designons

$$S_1:=\sum_{j=1}^{m}y_j\ ;\ S_2:=\sum_{k<l}y_ky_l,\ k,l=\overline{0,m}\ ;\ S_3:=\sum_{k<l<r}y_ky_ly_r\ ,k,l,r=\overline{0,m}$$

qui sont donnés du développement

$$A(y)=\prod_{j=0}^{m-1}(y-y_j)\ =y^m-S_1y^{m-1}+S_2y^{m-2}+\dots+(-1)^mS_m$$

Evidemment, en faisant dans (7) $p=0$, on obtient (5).

A la suite, démontrons que les polynômes (7) verifient l'égalité

$$(8)\quad E_s(x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+s-1})=x_n-\sum_{p=1}^{s-1}E_{s,p}(x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+s-1})\,f^p(x_n)$$

Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous la ferons pour les éléments initiaux $(x_o,x_1,\dots,x_{s-1})$ et $(y_o,y_1,\dots,y_{s-1})$, ou $y_i:=f(x_i), i=\overline{0,s-1}$ et pour simplifier posons

$$E_{s,p}(x_o,x_1,\dots,x_{s-1}):=E_{s,p}\ \text{et}\ [y_o,y_1,\dots,y_{k-1};F]:=\Delta_o^k(F)$$

Avec ces notations on peut écrire les égalités:

$$\begin{aligned}
E_s &= x_o-\Delta_o^1(F)S_1+\Delta_o^2(F)S_2-\Delta_o^3(F)S_3+\dots+(-1)^{s-1}\Delta_o^{s-1}(F)S_{s-1}\\
E_{s,1} &= \Delta_o^1(F)-\Delta_o^2(F)S_1+\Delta_o^3(F)S_2+\dots+(-1)^{s-2}\Delta_o^{s-1}(F)S_{s-2}\\
E_{s,2} &= \Delta_o^2(F)-\Delta_o^3(F)S_1+\dots+(-1)^{s-3}\Delta_o^{s-1}(F)S_{s-3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
E_{s,s-2} &= \Delta_o^{s-2}(F)-\Delta_o^{s-1}(F)S_1\\
E_{s,s-1} &= \Delta_o^{s-1}(F)
\end{aligned}$$

Multipliant ces égalités par y_o^j, $j=\overline{1,s-1}$ et rassemblant membre à membre, on tienant compte du fait que $A(y_o) = 0$, il en résulte

$$E_s + E_{s,1} y_o + E_{s,2} y_o^2 + \ldots + E_{s,s-1} y_o^{s-1} = x_o,$$ c'est-à-dire (8).

En nous basant sur les relations (4) et (8), on obtient la méthode itérative de base [3],

$$(9) \quad x_{n+s} = x_n - \sum_{p=1}^{s-1} E_{s,p}(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1}) f^p(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

ayant l'ordre de convergence s.

Pour la méthode itérative modifiée, on a

$$(10) \quad x_{n+s} = x_n - \sum_{p=1}^{s-1} E_{s,p}(x_o, x_1, \ldots, x_{s-1}) f^p(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

3. Applications:

1) Pour $s = 2$, on obtient aussi la méthode de base et que celle modifiée de la corde,

$$x_{n+2} = x_n - [x_n, x_{n+1}; f]^{-1} f(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

et respectivement,

$$x_{n+2} = x_n - [x_o, x_1; f]^{-1} f(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

2) Pour $s = 3$, on obtient l'analogue de la méthode de base des paraboles tangentes [1],

$$x_{n+3} = x_n - (E_{3,1}(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) + E_{3,2}(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) f(x_n)) f(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

et respectivement, pour la méthode modifiée [3],

$$x_{n+3} = x_n - (E_{3,1}(x_o, x_1, x_2) + E_{3,2}(x_o, x_1, x_2) f(x_n)) f(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Abstract

In this paper we present under discussion some results concerning Bernoulli's polynominals in divided differences. As immediate application of these in solving a given equation by iterative methods, we find some known results (secant method, analogous the of tangent parabolas) and some new ones.

BIBLIOGRAFIE

1. BALAZS,M.,GOLDNER,G.,Diferente divizate in spatii Banach si unele aplicatii ale lor,St.Cerc.Mat.T.21,Nr.7,9o5-966,1969.

2. [illegible], Sur les polynômes de Bernoulli (dans le presente volume)

3. ———— ,Rezolvarea ecuatiilor prin metode iterative,Teza de doctorat,Univ. Cluj,1981.

4. POPOVICIU,T.,Introduction à la théorie des differences divisées,Bull.Math. de la Soc.Roumaine des Sci.,T.42(1),65-78,1940.

5. SERGHEIEV,A.,S.,O metode hord,Sib.Mat.J.,T.2,Nr.2,282-289,1961.

6. TRAUB,J.,F.,Iterative Methods for the Solution of Equation,Pretince-Hall, Englewood Cliffs,New-York,1964.

UNIVERSITY OF BAIA MARE

4800 Baia Mare

ROMANIA