Buletinul Ştiinţific al Universităţii Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol. VIII (1992), 11-18

L'APPROXIMATION PAR DES POLINÔMES DU TYPE BERNSTEIN-STANCU DES FONCTIONS BÖGEL-CONTINUES

Dan BĂRBOSU

Resumé: Dans l'ouvrage [1] à une fonction $f\in C_{b,*}(U)$ on a associé le polinôme du type Bernstein-Stancu défini par:

$$(B_{m,n}f)(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)\,.\,W_{n,l}(y,\beta)\,[f(\frac{k}{m},y)+f(x,\frac{l}{n})-f(\frac{k}{m},\frac{l}{n})]$$

et on établi une théorème du type Weierstrass pour l'approximation des fonctions $f\in C_{b,*}(U)$.
Le but de cette note est de démontrer que le résultat de [1] a lieu dans un cadre plus général, precisé dans ce qui suit:
THéORÈME: *Si les conditions:*

$$i)\ \alpha=\alpha(m)\to 0\ (m\to\infty)\ ;\ \beta=\beta(n)\to 0\ \ (n\to\infty)$$

$$ii)\ f\in C_b^M(U)=\{f\in C_b(U)\,|\,(\exists)M>0\ a.i.\ |\Delta f(x,y;x',y')|\le M,\ (\forall)\,(x,y),(x',y')\in U\}$$

sont réalisées, la suite des polynômes

$$\{(B_{m,n}^{[\alpha;\beta]}f)(x,y)\}$$

converge uniformement vers $f(x,y)$.

1. Les notations utilisées

Sur le parcours de l'ouvrage on va utiliser les notations

(1.1) $U=[0,1]\times[0,1]$, $F(U)=\{f\,|\,f:U\to\mathbb{R}\}$

(1.2) $\Delta f(x,y;\ x',y')=f(x',y')-f(x',y)-f(x,y')+f(x,y)$ = la différence bidimensionnelle de f sur l'interval déterminé par les points $P(x,y)$, $P'(x',y')\in U$.

(1.3) $C_b(U)$ = la multitude des fonctions Bögel continues sur U. la notion de fonction Bögel continue en un point étant celle de [2].

$$(1.4)\qquad C_b^M(U)=\{f\in C_b(U)\mid(\exists)\,M>0$$
$$\text{a.i. } |\Delta f(x,y,x',y')|\le M,\ (\forall)\,(x,y),\,(x',y')\in U\}=$$

= la multitude des fonctions Bögel continues sur U, avec la variation Bögel bornée sur U

$$(1.5)\qquad W_{m,k}(x,\alpha)=\binom{m}{k}\frac{x^{[k,-\alpha]}(1-x)^{[m-k,-\alpha]}}{1^{m,-\alpha}},$$

$$W_{n,l}(y,\beta)=\binom{n}{l}\frac{y^{[l,-\beta]}(1-y)^{[m-k,-\alpha]}}{1^{n,-\beta}}$$

=les polynômes introduits par D.D.Stancu en [7], où $a^{(p,\gamma)}$ désigne la puissance factorièlle d'ordre p et paramètre γ de a.

2. Résultats auxiliaires utilisés dans l'ouvrage

Les propriétés des polynôms donnés par les relations (1.5) ont été établies en [7]. Elles sont exprimées en:

2.1. Théorème: *Les polynômes (1.5) ont les propriétés:*

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=1$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{k}{m}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=x$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{l}{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=y$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{k^2}{m^2}W_{m,k}(m,k(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=\frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m}+x(x+\alpha)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{l^2}{n^2}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=\frac{1}{1+\beta}\left[\frac{y(1-y)}{n}+y(y+\beta)\right]$$

en utilisant les propriétés exprimeées en (2.1) on établit quelques inégalités vérifiées par les polynômes qui seront utilisés dans la démonstration du théorème qui fait l'object de ce travail.

2.2. **Théorème**: *Les polynômes (1.5) vérifient l'inégalité:*

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(k-mx)^2 W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\le\frac{m^2}{1+\alpha}\left[\frac{1}{4m}+\frac{\alpha}{4}\right]$$

démonstration: On a successivement:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(k-mx)^2 W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}k^2 W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)-$$
$$-2mx\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}kW_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)+m^2x^2\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)=$$
$$=m^2\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{k^2}{m^2}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)-2m^2x\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{k}{m}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)+m^2x^2=$$
$$=m^2\frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m}+x(x+\alpha)\right]-2m^2x^2+m^2x^2=\frac{m^2}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m}+x(x+\alpha)-x^2(1+\alpha)\right]=$$
$$=\frac{m^2}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m}+\alpha x(1-x)\right]\le\frac{m^2}{1+\alpha}\left[\frac{1}{4m}+\frac{\alpha}{4}\right]\ \left(\text{parce que } (1-x)\le\frac{1}{4},\ (\forall)\,x\in[0,1]\right)$$

et l'inégalité (2.6) est démontré.

De manière analogue à (2.2) on démontre les inégalités exprimées en:

2.3. **Théorème**: *Les polynômes (1.5) vérifient l'inégalité:*

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(1-nx)^2 W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\le\frac{n^2}{1+\beta}\left[\frac{1}{4n}+\frac{\beta}{4}\right]$$

2.4. **Théorème**: *Les polynôme (1.5) vérifient l'inégalité:*

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(k-mx)^2(1-ny)^2 W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\le$$
$$\le\frac{m^2n^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}\left[\frac{1}{4m}+\frac{\alpha}{4}\right]\left[\frac{1}{4n}+\frac{\beta}{4}\right]$$

3. L'approximation des fonctions Bögel continues par polynômes du type Bernstein – Stancu

A la fonction $f\in F(U)$ on associé le polynôme:

$$(B_{m,n}^{(\alpha,\beta)}f)(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\left[f\left(\frac{k}{m},x\right)+f\left(x,\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)\right]$$

On formulé et on démontré:

3.1. **Théorème:** *Si les conditions:*

i) $\alpha=\alpha(m)\to 0\ (m\to\infty)$, $\beta=\beta(n)\to 0\ (n\to\infty)$

ii) $f\in C_D^M(U)$

sont réalisées, alors la suite des polynômes (3.1) convèrge vers $f(x,y)$, uniformement sur U.

démonstration

$$\textit{Soit: } (R_{m,n}^{[\alpha;\beta]}f)(x,y)=f(x,y)-(B_{m,n}^{[\alpha;\beta]}f)(x,y)$$

On démontrera que

$$(R_{m,n}^{[\alpha;\beta]}f)(x,y)\Rightarrow 0.$$

En utilisant l'égalité (2.1) et la relation (3.1) on obtient l'inégalité:

$$|(B_{m,n}^{[\alpha;\beta]}f)(x,y)-f(x,y)|\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n})$$

Soit $(\epsilon)>0$; parce que $f\in C_D(U)$ on a:

$$|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n})|<\varepsilon \textit{ si: } |x-\frac{k}{m}|<\delta(\varepsilon) \textit{ et } |y-\frac{l}{n}|<\delta(\varepsilon)$$

Observons que la somme du membre droit de (3.2) contient des termes pour lesquels les deux inégalitès (3.3) sont vérifiées, des tèrmes pour lesquels seulement une des deux inégalités (3.3) est vérifiée et des termes pour lesquels aucune des inégalités (3.3) n'est pas vérifée.

Notons:

$$S_1=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)|f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n})|=$$

= la somme correspondante aux paires de points de U qui vérifient les deux inégalités (3.3).

$$S_2=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n}|=$$

= la somme correspondante aux paires de points de U qui ne vérifient aucune des inégalités (3.3).

$$S_3=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\,|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n}|=$$

= la somme correspondante aux paires de points de U qui vérifient la première seulement des inégalités (3.3).

$$S_4=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)\,|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n}|=$$

= la somme correspondante aux paires de points de U qui vérifient la déuxième seulement des inégalités (3.3).
Conformement aux notations ci-dessus l'inégalité (3.2) peut être transcrite sous la forme:

$$|(B_{m,n}^{[\alpha,\beta]}f)(x,y)-f(x,y)|\le S_1+S_2+S_3+S_4$$

En S_1 nous avons

$$|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n}|<\frac{\varepsilon}{4}$$

et alors, conformément à la relation (2.1) on obtiènt:

$$S_1<\frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)<\frac{\varepsilon}{4}$$

En S_2 ont lieu les inégalités

$$|\frac{k}{m}-x|\ge\delta \quad et \quad |\frac{1}{n}-y|\ge\delta-$$

qu'on écrit sous la forme équivalente:

$$\frac{(k-mx)^2}{m^2}\ge\delta^2 \quad et\,\frac{(1-ny)^2}{n^2}\ge\delta^2$$

En employant (3.5) on obtient:

$$s_2=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m'}k(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)*|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{1}{n})|\le$$

$$\frac{1}{m^2n^2\delta^4}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)(k-mx)^2(1-ny)^2$$

$$|\Delta f(x,y;\frac{k}{m},\frac{1}{n})|\le\frac{M}{m^2n^2\delta^4}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}W_{m,k}(x,\alpha)W_{n,l}(y,\beta)(k-mx)^2(1-ny)^2$$

parce que $f\in C_b{}^M(U)$.

En employant l'inégalité (2.8) on obtient:

$$S_2 \le \frac{M}{m^2n^2\delta^2}\,\frac{m^2n^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}\,\frac{1}{16}\left(\frac{1}{m}+\alpha\right)\left(\frac{1}{n}+\beta\right)$$

De l'inégalité précedente et l'hypothèse i) on obtient:

$$S_2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

En S_3 nous avons réalisée la première inégalité (3.5) seulement et donc:

$$S_3 = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\,W_{n,l}(y,\beta)\left|\Delta f\left(x,y;\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{M}{m^2\delta^2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\,W_{n,l}(y,\beta)\,(k-mx)^2$$
$$\text{car } f\in C_b^M(U)$$

En employant l'inégalité (2.6) on obtient:

$$S_3 \le \frac{M}{m^2\delta^2}\,\frac{m^2}{1+\alpha}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m}+\alpha\right) = \frac{M}{4\delta^2(1+\alpha)}\left(\frac{1}{m}+\alpha\right)$$

L'inégalité précédente et l'hypothèse i) assurent l'inégalité:

$$S_3 < \frac{\varepsilon}{4}$$

En S_4 nous avons réalisée la seconde inégalité (3.5) seulement et donc:

$$S_4 = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\,W_{n,l}(y,\beta)\left|\Delta f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n};x,y\right)\right| \le$$
$$\le \frac{M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} W_{m,k}(x,\alpha)\,W_{n,l}(y,\beta)\,(l-nx)^2 \quad \text{car} f\in C_b^M(U)$$

En employant l'inégalité (2.7) ou obtient:

$$S_4 \le \frac{M}{n^2\delta 2}\,\frac{n^2}{4(1+\beta)}\left(\frac{1}{n}+\beta\right) = \frac{M}{4\delta^2(1+\beta)}\left(\frac{1}{n}+\beta\right)$$

L'inégalité précédente et l'hypothèse i) assurent l'inégalité:

$$S_4 < \frac{\varepsilon}{4}$$

Les inégalités (3.4) - (3.7) assurent l'inégalité:

$$|(R_{m,n}^{[\alpha,\beta]}f)(x,y)|=|(B_{m,n}^{[\alpha,\beta]}f)(x,y)-f(x,y)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon \quad (\forall)\,(x,y)\in U$$

L'inégalité (3.8) demontre que

$$(R_{m,n}^{[\alpha,\beta]}f)(x,y)$$

convèrge vers zero uniformément en U et l'affirmation de l'énoncé est démontrée.

4. **Obsérvations**

Nous allons faire quelques obsérvations liées au resultat exprimé en (3.1) et à celles obtenus en [1] et [4].

4.1. **Théorème**: *A lieu l'inclusion* $C_{b,K}(U)\subset C_b(U)$

démonstration

Vraiment, $(\forall) f\in C_{b,K}(U)\Rightarrow(\exists) g\in C(U), (\exists) k\in K_b(U)$ a.î. $f(x,y)=g(x,y)+k(x,y)$, $(\forall)(x,y)\in U$. Alors, $(\forall)(x,y),(x',y')\in U$ nous avons: $\Delta f(x,y;x',y') = \Delta g(x,y;x',y')$ car $\Delta k(x,y;x',y') = 0$[3].

Mais comme $C(U)\subset C_b(U)$ il suit de là que

$$\lim_{\substack{x'\to x\\ y'\to y}} g(x,y;x',y')=0$$

par conséquant, $(\exists)M>0$ a.î. $|\Delta f(x,y;x',y')|<M$, $(\forall)(x,y),(x',y')\in U$. L'inégalité précédente demontre l'affirmation de l'énoncé.

4.2. **Rémarque**: De la théorème 4.1 il suit que le résultat obtenu en (3.1) généralise le resultat de [1].

4.3. **Rémarque**: On obsèrve que $(B_{m,n}^{(0,0)}f)(x,y)=(B_{m,n}f)(x,y)$, où $(B_{m,n}f)(x,y)$ est le polynôme introduit en [4] pour l'approximation d'une fonction $f\in C_b^M(U)$.

4.4. **Rémarque**: L'opérateur $B_{m,n}$ est un opérateur du type "blending" qui s'obtient naturellement, en effectuant la somme $P_m^{(\alpha)} \oplus P_n^{(\beta)}$ des opérateurs introduits eu [8].

BIBLIOGRAPHIE

1. BARBOSU, D. : Obsérvations sur l'approximation des fonctions bidimensionelles continues, Buletinul Ştiinţific al Universitaţii Baia Mare, seria B, Matematică-Informatică, vol.VIII, nr.1-12 1991, pag.75-79.

2. BĂRBOSU, D. : Asupra aproximării funcţiilor bidimensional continue (à paraitve).

3. BĂRBOSU, D. : Une caractérisation des constantes hyperboliques (dans le présente volume).

4. DOBRESCU, E., MATEI, I. :Aproximarea funcţiilor bidimensional continue prin polinoame de tip Bernstein, Analele Univ. Timişoara, Seria: Ştiinţe matematice-fizice, vol.IV, 1966 pag.85-90.

5. NICOLESCU, M. : Contribuţii la o analiză de tip hiperbolic a planului, Studii şi cercetări matematice, III, nr.12/1952, pag.7-51.

6. NICOLESCU, M. : Manual de analiză matematică, vol.II, Editura Didactică şi pedagogică Bucureşti, 1971, pag.5-9.

7. STANCU, D.D. : Aproximarea funcţiilor de două şi mai multe variabile prin operatori de tip Bernstein, Studii şi cercetări matematice, Tom.22/MY2/1970, pag.335-345.

8. STANCU, D.D. : Aproximation of bivariante functions by means of some Bernstein-type operators, Multivariante aproximation, edited by D.C.Havdscomb, Academic Press, London, 1978.

University of Baia Mare
Faculty of Letters and Sciences
str.Victoriei, nr.76, tel.99/416305
4800 BAIA MARE
ROMÂNIA