Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol. VIII(1992), 27-34

ECUATII DIFERENŢIALE CU MODIFICARE LINIARĂ A ARGUMENTULUI

Viorica MUREŞAN

Abstract. In this paper on studied the existence of the analitical solutions of some differential equations with deviating argument.

Există situaţii cînd evoluţia unui fenomen este determinată nu numai de starea prezentă dar şi de starea trecută a acestuia. Un astfel de exemplu este problema dinamicii populaţiei care poate fi modelată printr-o ecuaţie diferenţială cu argument modificat de forma

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,x(t-h),\quad t\in[t_0,\ T] \qquad (1)$$

unde $a,b\in\mathbb{R}_+$ şi $h\geq 0$, la care se determină soluţiile care îndeplinesc condiţia

$$x(t) = \phi(t) \text{ pentru } t\in[t_0-h,\ t_0], \qquad (2)$$

unde ϕ reprezintă legea creşterii populaţiei pe intervalul de timp $[t_0-h,\ t_0]$.

Problema (1)+(2) este o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială cu argument modificat, care, în acest caz este cu argument întîrziat, adica o ecuatie de forma

$$x'(t) = f(t,x(t),x(g(t))),\quad t\in[a,b] \qquad (3)$$

pentru care există $c\in\mathbb{R}$, $c<a$ astfel încît $c\leq g(t)\leq t$, $\forall t\in[a,b]$.

Dacă pentru ecuaţia (3) există $d\in\mathbb{R}$, $d>b$ astfel ca $t\leq g(t)\leq d$, $\forall t\in[a,b]$, atunci ecuaţia se numeşte cu argument înaintat.

Există situaţii cînd o ecuaţie îşi modifică tipul prin modificarea mulţimii de valori a variabilei.

De exemplu

$$x'(t) = f(t, x(t), x(2t)),$$

pentru $t\in[0,1]$ este ecuaţie cu argument înaintat iar pentru $t\in[-1,0]$ este ecuaţie cu argument întîrziat.

Noţiunea de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială cu argument modificat este strîns legată de modificarea argumentului. De asemenea formularea problemei Cauchy se face corespunzator pentru fiecare ecuaţie.

In [7], [8], [10], [14], [21] se studiază diferite tipuri de ecuaţii, se dau teoreme de existenţă, de existenţă şi unicitate a soluţiei unor probleme, de dependenţă a soluţiilor de condiţiile iniţiale, se studiază ecuaţiile liniare de ordinul n cu argumente modificate, ecuaţiile liniare cu coeficienţi constanţi şi cu modificări constante ale argumentelor, se face studiul stabilităţii soluţiilor, a existenţei soluţiilor periodice şi altele.

În studiul curbelor plane intervine ecuaţia cu modificare liniară a argumentului

$$y'(x) = y(\lambda x)\ , \quad \lambda>0 \tag{4}$$

în problema găsirii curbelor de ecuaţie $y = y(x)$ pentru care tangenta în fiecare punct $M(x,y(x))$ este paralelă cu vectorul de poziţie al punctului $P(1,y(\lambda x))$. Ecuaţia (4) este cunoscută sub numele de ecuaţia lui Mahler deoarece în 1940 ([13]) Mahler ajunge la această ecuaţie studiind o problemă din teoria numerelor. Mai tîrziu este reluat studiul acestei ecuaţii în [2], [6], [17], [20].

Ecuaţia diferenţial-funcţională

$$y'(x) = A\, y(\lambda x) + b\, y(x), \quad x\geq 0 \tag{5}$$

unde $a,b\in\mathbb{R}$ şi $\lambda>0$ apare ca un model matematic simplificat al unei probleme industriale în legătură cu circuitul curentului electric într-un sistem de linii ferate electrificate şi cu problema pantografului ([18], [19]). Ea este studiată în [9], [11], [12].

Fie ecuaţia cu modificare liniară a argumentului

$$y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda x)), \ \lambda>0, \ x\in I\subset\mathbb{R} \tag{6}$$

În [15] sînt date teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiei unor probleme Cauchy relative la această ecuaţie dacă $\lambda\in]0,1[$ respectiv $\lambda>1$, pentru unele intervale I convenabile. De asemenea se pot considera şi ecuaţiile

$$y''(x) = f(x, y(x), y(\lambda x)), \ \lambda>0, \ x\in I \tag{7}$$

În prezenta lucrare ne propunem să studiem existenţa soluţiilor analitice pentru unele probleme relative la ecuaţii cu modificare liniară a argumentului.

Fie problema

$$y'(x) = k_1 y(\lambda_1 x)+\ldots+k_p y(\lambda_p x + b\, y(x),\ x=0 \quad (8)$$

$$y(0) = 1, \quad (9)$$

unde $\lambda_j \in]\ 0,1\ [$, $j=1,p$ şi $k_1,\ k_2,\ldots,k_p,\ b \in \mathbb{R}$.

Are loc

TEOREMA 1 *Problema (8)+(9) are o soluţie de forma*

$$y(x) = 1+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots$$

unde seria de puteri are raza de convergenţă $\mathbb{R} = \infty$.

Observaţie. Daca $k_2 = k_3 = \ldots = k_p = 0$, din Teorema 1 se obţine un rezultat pentru ecuaţia (5). În [11] se afirmă că dacă $\lambda>1$ nu există soluţie a problemei (5)+(9) care să fie analitică într-o vacinătate a lui $x = 0$.

Fie problema

$$y''(x) = a\ y(\lambda x) + b\ y(x),\quad x\geq 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \quad (11)$$

unde $\lambda \in]\ 0,1\ [$, $a,b \in \mathbb{R}_+$.

Are loc

TEOREMA 2 *Problema (10)+(11) are o soluţie de forma*

$$y(x) = 1+x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots,$$

şi această serie are raza $R = \infty$.

Demonstratie. Dacă se consideră

$$y(x) = 1 + x + a_2 x^2 +\ldots+ a_n x^n +\ldots$$

atunci

$$y'(x) = 1 +2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 +\ldots+ n\, a_n x^{n-1} +\ldots,$$

$$y''(x) = 2\, a_2 +3.2\, a_3 x +\ldots+ n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} +\ldots\ .$$

Prin înlocuire în ecuaţia (10) se obţine

$$2a_2+3\cdot 2a_3 x+\ldots+(n+1)n a_{n+1} x^{n-1}+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\ldots$$
$$=a[1+(\lambda x)+a_2(\lambda x)^2+\ldots a^n(\lambda x)^n+\ldots]+$$
$$b[1+x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots],$$

de unde rezultă

$$2a_2=a+b\ ,\ 3.2.a_3=a\lambda+b,\ldots,(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_n(a\lambda^n+b),\ldots$$

sau

$$a_2=\frac{a+b}{2}\ ,\ a_3=\frac{a\lambda+b}{3.2}\ ,\ldots,a_{n+2}=\frac{a\lambda^n+b}{(n+2)(n+1)},\ldots$$

Din relaţia de recurenţă se obţine

$$a_{2K+2}=\frac{(a\lambda^2+b)(a\lambda^4+b)\ldots(a\lambda^{2K}+b)(a+b)}{(2k+2)}$$

şi

$$a_{2K+1}=\frac{(a\lambda+b)(a\lambda^3+b)\ldots(a\lambda^{2k-1}+b)}{(2k+1)}$$

Astfel

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}<\frac{1}{2k+1}$$

şi deoarece

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2K}}>0$$

rezultă că

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=0$$

Analog,

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}<\frac{a+b}{2k}$$

deci

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=0$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$$

adică R = ∞. Astfel teorema este demonstrată.

Problema ce se pune pentru ecuaţiile diferenţiale cu argument modificat este dacă analiticitatea coeficienţilor, a funcţiei care dă modificarea argumentului şi a funcţiei iniţiale pot să asigure analiticitatea soluţiilor problemei. Se pare că răspunsul la aceasta este negativ. În [22] se prezintă ca exemplu problema

$$y'(x) = -\alpha y(x - \sin^2 x), \quad x \geq x_0 \tag{12}$$

$$y(x) = \phi(x), \quad x \in [x_0 - 1, \ x_0] \tag{13}$$

unde $\alpha > 0$ şi $\phi \in C\ [x_0 - 1, x_0]$ şi se arată că soluţia banală $y(x) = 0$ este singura soluţie analitică pe $[x_0, \infty)$ pentru un anumit x_0 deşi întîrzierea $h(x) = \sin^2 x$ este o funcţie analitică.
În [1] se consideră problema

$$y'(x) = y(x-1), \quad x > 0 \tag{14}$$

$$y(x) = 1, \quad x \in [-1, 0] \tag{15}$$

care are o soluţie unică în $[-1, 2]$ dată prin

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0] \\ 1 + x, & x \in [0, 1] \\ \frac{3}{2} + \frac{x^2}{2}, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

şi care nu este analitică pe $(0, 2)$ nefiind analitică în $x = 1$.
Problema

$$y'(x) = (-4 \sin x)\ y\left(\frac{1}{2}x\right), \quad x \geq 0$$
$$y(0) = 1 \tag{17}$$

admite o soluţie analitică şi anume $y = \cos 2x$.
Pentru ecuaţii de forma

$$y'(x) = a(x)\ y(\lambda x)$$

se pune problema dacă analiticitatea funcţiei a poate să asigure existenţa soluţiilor analitice ale unor probleme relative la această ecuaţie.

B I B L I O G R A F I E

1. BANKS, H.T., JACOBS, M.Q.: Optimal control and linear functional differential equations, Lectures Notes in mathematics, Nr.144, 1970, 5-15.

2. DE BRUIJN, N.G.: On Mahler's partition problem, Indag.Math. 10(1948).

3. DE BRUIJN, N.G.: The asymptotically periodic behaviour of the solutions of some linear functional equations, Amer.J.Math., 71(1949), 313-330.

4. DE BRUIJN, N.G.: On some linear functional equations, Publicationes Math., Debrecen, 1950, vol.I, 3, 129-134.

5. DE BRUIJN, N.G.: The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$, I, , Indag.Math., 15(1953),449-458, 459-464

6. DUNKEL, G.M.: Function differential equations: Examples and problems, Lectures Notes in Math., 144,1970, 49-63.

7. ELSGOLTZ, L.E.: Introducere în teoria ecuaţiilor diferenţiale cu argument întîrziat, Moscova, 1964 (l.rusă).

8. ELSGOLTZ, L.E., NORKIN, S.B.: Introducere în teoria ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat, Moscova, 1971 (l.rusă).

9. FOX, L., MAYERS, D.F., OCKENDON, J.R., TAYLOR, A.B.: On a functional defferential equation, J.Inst.Math.Appl., 8(1971), 271-307.

10. HALE, J.: Theory of functional differential equations, Springer, 1977.

11. KATO, T., MCLEOD, J.B.: The functional-differential equation $y'(x = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull.Amer.Math.Soc., 77, 61971), 891-937.

12. KATO, T.: Asymptotic behaviour of solutions of the functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Delay and funct. diff.eq. and their appl., Acad.Press., New York, 1972, 197-217.

13. MAHLER, K.: On a special functional equation, J.London, Math.Soc., 15(1940), 115-123.

14. MÎSKIS, A.D.: Ecuaţii diferenţiale liniare cu argument întîrziat, Moscova, 1972 (l.rusă).

15. MUREŞAN, V.: Existence and uniqueness theorems for the equations of type $y'(x) = f(x,y(x), y(\lambda x))$, Preprint 9, 1987, "Babeş-Bolyai" Univ., 109-122.

16. MURESAN, V.: The existence of solution of some functional-differential equations, Preprint 8, 1988, "Babeş Bolyai" Univ., 9-16.

17.. OBERG, R.J.: On the local existence of solutions of certain funcional-differential equations, Proc.Amer.Math.Soc., 20, 2 (1969), 295-302.

18. OCKENDON, J.R.: Differential equations and industry, The Math. Scientist, vol.5, Nr.1, 1980, 1-12.

19. OCKENDON, J.R., TAYLOR, A.B.: The dynamics of a current collection system for an electric, Proc. R. Soc. London, A 322,447-463.

20. PINNY, E.: Ecuaţii diferenţial diferenţă ordinare, Moscova,1961 (l.rusă).

21. RUS, I.A.: Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

22. WINSTON, E., YORKE, J.: Linear delay differential equations whose solutions become identically zero, Rev. Roumaine de math. pures et appl., 14, 6 (1969), 885-887.

Polytechnic Institute Cluj-Napoca
3400 Cluj-Napoca
ROMÂNIA