Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.VIII(1992),49-52

UNE CARACTéRISATION DES CONSTANTES HYPéRBOLIQUES

Dan BĂRBOSU

Résumé: Soit $\mathbb{I} = [a,b] \times [c,d]$, $F(\mathbb{I}) = \{f \mid f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}\}$ et Δ: $F(\mathbb{I})\to F(\mathbb{I}))$ l'opérateur différence bidimensionnelle.
On note:
$K_b(\mathbb{I}) = \{f\in F(\mathbb{I}) \mid (\exists)f_1: [a,b]\to\mathbb{R}$,
$(\exists)f_2: [c,d]\to R$a.i.$f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)\}$.
Le but de la note est de démontrer l'égalité $K_b(\mathbb{I}) = \ker \Delta$.

Soit $\mathbb{I} = [a,b] \times [c,d]$, $F(\mathbb{I} = \{f \mid f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}\}$.
L'opérateur difference bidimensionnelle Δ $:F(\mathbb{I})\to F(\mathbb{I}])$ a été définie dans le travail [3].

Sont immédiats les résultats exprimées dans les deux propositions suivantes:

1. Proposition: L'opérateur Δ : $F(\mathbb{I})\to F(\mathbb{I})$ est linéaire.

2. Proposition: La multitude:

$\ker \Delta = \{f\in F(\mathbb{I}) \mid \Delta f(x_0,\ y_0;x,y) = 0, (\forall)(x_0,y_0),(x,y)\in]\}$
est un sous-éspace linéaire $F(\mathbb{I})$.

Nous rappelons dans la suite la notation de constante hypérbolique, introduite dans [4], par:

3. Définition: la fonction k: $\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ s'appelle constante hypérbolique si existe $k_1:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ de manière que $k(x,y) = k_1(x) + k_2y)$, $(\forall)(x,y\in\mathbb{I}$.

La multitude des constants hypérboliques sera notté par $K_b(\mathbb{I})$. Le but de la note est de démontrer l'égalité $\ker\Delta = K_b(\mathbb{I})$.
Un résultat aidant est éxprimé par:

4. Proposition: L'éspace $\ker \Delta$ a la dimension 2.

Demonstration: Nous montrons por commencer qu'il y a en $\ker \Delta$ deux éléments linéairement independentes.

Soit $f \in F(\mathbb{I})$; si $y = \beta = \text{const}$, on obtient la fonction donnée par la correspondance $(x,\beta) \to f(x,\beta) = f_1(x)$.
Il est clair que $f_1 \in \ker\Delta$, car $(\forall)(x_0,y_0)$, $(x,y) \in \mathbb{I}$ on a:

$\Delta f(x_0,y_0,x,y) = f(x,\beta) - f(x_0,\beta) - f(x,\beta) + f(x_0,\beta) = 0$

D'une manière analogue par la correspondance

$(\alpha,y) \to \exists(x,y) \Rightarrow f(\alpha,y) = f_2(y)$.

Un calcul élémentaire montre que $f_2 \in \ker \Delta$.

De la manière de leur construction, les fonctions f_1 et f_2 sont linéairement indépendentes.

Dans la suite, nous montrons que chaques trois fonctions du $\ker \Delta$ sont linéairement indépendentes.

Soit alors $(\forall) f \in \ker \Delta \Rightarrow (\forall)(x_0,y_0)$, $(x,y) \in \mathbb{I}$ on a:

$\Delta f(x_0,y_0;x,y) = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x,y_0) - \frac{1}{2} f(x_0,y_0) + f(x_0,y) - \frac{1}{2} f(x_0,y_0)$$

En notant alors

$$f_1 : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = f(x,y_0) - \frac{1}{2} f(x_0,y_0),$$
$$f2 : [c,d] \to \mathbb{R},\ f_2(y) = f(x_0,y) - \frac{1}{2} f(x_0,y_0)$$

et ténant compte du fait que f_1, $f_2 \in \ker\Delta$ on obtiènt l'affirmation faite au commencement.

5. **Observations.**

i) Dans la seconde partie de la démonstration précédente on démontré au fait l'inclusion $\ker \Delta \subset K_b(\mathbb{I})$.

ii) L'inclusion $K_b(\mathbb{I}) \subset \ker\Delta$ est evidente.

Les observations précédentes justifient:

6. **Propositions:** A lieu l'égalité $K_b(\mathbb{I}) = \ker\Delta$.

B I B L I O G R A F I E

1. BĂRBOSU, D.: Observations sur l'approximation des fonctions bidimensionel continues, Bul.Şt. Univ. Baia Mare, seria B, Matematică-Informatică, vol.VIII, nr.1-2, pag.75-79.

2. BĂRBOSU,D.: Asupra aproximării funcţiilor bidimensionel continues, Bul.Şt. Univ.tehnică Oradea (sub tipar).

3. BÖGEL, K.: Journal für die reine und augewande Mathematik, Bd.170, 1934, Bd.173, 1935.

4. NICOLESCU, M.: Contribuţii la analiză de tip hiperbolic a planului, în "Studii şi cercetări matematice", III, nr.1-2 (1952), p.7-51.

University of Baia Mare
Faculty of Letters and Sciences
str. Victoriei, nr.76, tel.99/416305
4800 BAIA MARE
ROMÂNIA