Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.IX(1993), 19-24

OPERATORI GENERALIZAŢI DE TIP FAVARD-SZASZ PENTRU APROXIMAREA FUNCŢIILOR DE DOUĂ VARIABILE

Alexandra CIUPA

The aim of this paper was to extend to two variables an generalized Favard-Szasz type operator. It was studied the convergence of this sequence of operators and it was given an estimate of the order of approximation.

1.In [3] A.Jakimovski şi D.Leviatan au construit un operator generalizat de tip Favard-Szasz, operator obţinut cu ajutorul polinoamelor Appell [1].

Se consideră

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

o funcţie olomorfă în discul $|z| < R$, $R > 1$ şi se presupune că $g(1) \neq 0$. Notăm $p_k(x) \equiv p_k(x,g)$ polinoamele Appell date prin

$$g(u)e^{ux} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k \tag{1}$$

Funcţia g se numeşte funcţie generatoare a polinoamelor Appell. Caracteristică pentru aceste polinoame este proprietatea $p_k'(x) = p_{k-1}(x)$, $(p_{-1}(x) = 0)$.

Pentru orice funcţie f definită în intervalul $[0, \infty)$ se asociază operatorii

$$(L_u f)(x) = \frac{e^{-ux}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(ux) f\left(\frac{k}{u}\right), \quad u \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Pentru $g(z) \equiv 1$, din (2) se obtin operatorii lui Favard

$$(S_u f)(x) = e^{-ux} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ux)^k}{k!} f\left(\frac{k}{u}\right)$$

Se presupune că $p_k(x) \geq 0$ pentru $x \in [0, \infty)$ și $k=0,1,2,\ldots$ B.Wood [4] a demonstrat că operatorii (2) sînt pozitivi dacă și numai dacă

$$\frac{a_n}{g(1)} \geq 0,\ n=0,1,2,\ldots$$

A.Jakimovski și D.Leviatan au dat teoreme de convergență a șirului de operatori $\{P_u\}$ care se aplică funcțiilor de tip exponențial:

$$|f(t)| \leq e^{At},\ t \geq 0,$$

A oarecare, finit.

2.Scopul lucrării este extinderea la două variabile a acestui operator, studiul convergenței și a ordinului cu care șirul de operatori construit aproximează o funcție de două variabile.

Fie două funcții analitice în discul $|z| < R, R > 1$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

și notăm p_k și q_k, $k=0,1,\ldots$ polinoamele Appell generate de g și h, deci avem:

$$(3) \qquad g(u)e^{ux} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k \quad \text{și} \quad h(v)e^{vx} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x)v^k$$

Fie $\mathcal{E}_2$ spațiul liniar al funcțiilor $f:[0,\infty)\times[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de tip exponențial. Mai precis $f \in \mathcal{E}_2$ dacă și numai dacă există constantele A și B astfel încît

$$|f(x,y)| \leq e^{Ax+By}$$

Pentru orice $f \in \mathcal{E}_2$ se atașează operatorii

$$(4) \qquad (P_{u,v}f)(x,y) = \frac{e^{-ux}\ e^{-vy}}{g(1)\cdot h(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_k(ux)q_i(vy)f\left(\frac{k}{u},\frac{i}{v}\right)$$

unde presupunem că $g(1) \neq 0$, $h(1) \neq 0$

Să presupunem că

$$\frac{a_n}{g(1)} \geq 0 \quad \text{și} \quad \frac{b_n}{h(1)} \geq 0\ ,\ n \geq 0$$

deci operatorii $P_{u,v}$ sînt pozitivi

Pentru $g(z) \equiv 1$ și $h(z) \equiv 1$ din (4) se obțin operatorii Favard-Szasz pentru două variabile

$$(S_{u,v}f)(x,y) = e^{-(ux+vy)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ux)^k}{k!}\frac{(vy)^i}{i!}f\left(\frac{k}{u},\frac{i}{v}\right)$$

Lema 1.
Operatorii $P_{u,v}$ definiți la (4) au proprietățile

(5) $(P_{u,v}e_{o,o})(x,y) = 1$

(6) $(P_{u,v}e_{1,o})(x,y) = x + \frac{1}{u}\cdot\frac{g'(1)}{g(1)}$

(7) $(P_{u,v}e_{o,1})(x,y) = y + \frac{1}{v}\cdot\frac{h'(1)}{h(1)}$

(8) $$(P_{u,v}e_{2,2})(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{u}\left(1+2\,\frac{g'(1)}{g(1)}\right) + \frac{y}{v}\left(1+2\,\frac{h'(1)}{h(1)}\right) + \frac{1}{u^2}\frac{g''(1)+g'(1)}{g(1)} + \frac{1}{v^2}\,\frac{h''(1)+h'(1)}{h(1)}$$

unde $e_{o,o}(t,\tau)=1$, $e_{1,o}(t,\tau)=t$, $e_{o,1}(t,\tau)=\tau$

$e_{2,2}(t,\tau)=t^2+\tau^2$

Demonstrație: Pentru operatorul L_u atașat unei funcții de o variabilă se cunosc următoarele rezultate [2] :

$(L_u1)(x) = 1$
$(L_ut)(x) = x + \frac{1}{u}\cdot\frac{g'(1)}{g(1)}$

$$(L_ut^2)(x) = x^2 + \frac{x}{u}\left(1 + 2\frac{g'(1)}{g(1)}\right) + \frac{1}{u^2}\frac{g''(1)+g'(1)}{g(1)}$$

Folosind aceste relații la calculul operatorului $P_{u,v}$ aplicat funcțiilor de probă $e_{i,j}$,$i,j\in\{0,1,2\}$ se obțin fără dificultate relațiile (5)-(8).

Rezultatele acestei leme le folosim pentru a demonstra
TEOREMA 1
Dacă $f\in\xi_2$ este continuă pe $H=[0,a]\times[0,b]$ unde a și b sînt numere pozitive arbitrare,fixate,atunci avem uniform pe H : $\lim\limits_{u,v\to\infty}\left(P_{u,v}f\right)(x,y) = f(x,y)$

Demonstrație: Din relațiile (5)-(8) rezultă că avem

$\lim_{u,v\to\infty}\left(P_{u,v} f\right)(x,y) = f(x,y)$ pentru orice $(x,y)\in H$,

unde $f(x,y)$ reprezintă pe rînd funcțiile $1, x, y, x^2+y^2$

Aplicînd teorema lui Volkov, rezultă că atunci cînd $u,v\to\infty$ șirul operatorilor $P_{u,v}f$ tinde uniform pe H la f.

3. In continuare ne vom ocupa de evaluarea ordinului de aproximare a unei funcții $f\in\mathcal{E}_2$ continuă pe H, prin operatorii $P_{u,v}$. Vom folosi modulul de continuitate de ordinul întîi, de variabile δ_1, δ_2:

$$\omega(\delta_1,\delta_2) = \sup\left\{|f(x'',y'') - f(x',y')| : |x''-x'|\le\delta_1, |y''-y'|\le\delta_2\right\}$$

unde $\delta_1 > 0$ și $\delta_2 > 0$

Vom demonstra

TEOREMA 2

Dacă $f\in\mathcal{E}_2$ și este continuă pe $H = [0,a]\times[0,b]$, atunci

$$|f(x,y) - (P_{u,v}f)(x,y)| \le \tag{9}$$

$$\le\left(1 + \sqrt{a+\frac{1}{u}\,\frac{g''(1)+g'(1)}{g(1)}} + \sqrt{b+\frac{1}{v}\,\frac{h''(1)+h'(1)}{h(1)}}\right)\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{u}},\frac{1}{\sqrt{v}}\right)$$

pentru orice $(x,y)\in H$.

Demonstrație: Folosind (5) putem scrie

$$|f(x,y) - (P_{u,v}f)(x,y)| \le \tag{10}$$

$$\le \frac{e^{-ux}}{g(1)}\,\frac{e^{-vy}}{h(1)}\sum_{i,k=0}^{\infty} p_k(ux)q_i(vy)\left|f(x,y) - f\left(\frac{k}{u},\frac{i}{v}\right)\right|$$

In continuare facem uz de proprietăți cunoscute ale modulului de continuitate. Avem

$$\left|f(x,y) - f\left(\frac{k}{u},\frac{i}{v}\right)\right| \le \omega\left(\left|x-\frac{k}{u}\right|, \left|y-\frac{i}{v}\right|\right) =$$

$$= \omega\left(\frac{1}{\delta_1}\left|x-\frac{k}{u}\right|\delta_1, \frac{1}{\delta_2}\left|y-\frac{i}{v}\right|\delta_2\right) \le \left(1+\frac{1}{\delta_1}\left|x-\frac{k}{u}\right| + \frac{1}{\delta_2}\left|y-\frac{i}{v}\right|\right)\omega(\delta_1,\delta_2)$$

Inlocuind în (10), rezultă că

$$|f(x,y) - (P_{u,v}f)(x,y)| \le \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\,\frac{e^{-ux}}{g(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(ux)\left|x-\frac{k}{u}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta_2}\,\frac{e^{-vy}}{h(1)}\sum_{i=0}^{\infty} q_i(vy)\left|y-\frac{i}{v}\right|\right)\omega(\delta_1,\delta_2)$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy și relațiile (5)-(8), avem

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(ux)\left|x - \frac{k}{u}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(ux)} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(ux)\left(x - \frac{k}{u}\right)^2} =$$

$$= g(1)\, e^{ux} \sqrt{\frac{x}{u} + \frac{1}{u^2}\,\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)}}$$

și

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i(vy)\left|y - \frac{i}{v}\right| \leqslant h(1)\, e^{vy} \sqrt{\frac{y}{v} + \frac{1}{v^2}\,\frac{h''(1) + h'(1)}{h(1)}}$$

Făcînd uz de aceste mojorări , obținem:

$$\left| f(x,y) - (P_{u,v}f)(x,y)\right| \leqslant$$

$$\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\sqrt{\frac{x}{u} + \frac{1}{u^2}\,\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)}} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{\delta_2}\sqrt{\frac{y}{v} + \frac{1}{v^2}\,\frac{h''(1) + h'(1)}{h(1)}}\right)\omega(\delta_1,\delta_2)$$

Pentru $(x,y) \in [0,a] \times [0,b]$ avem

$$\frac{x}{u} + \frac{1}{u^2}\,\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \leqslant \frac{a}{u} + \frac{1}{u^2}\,\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)}$$

$$\frac{y}{v} + \frac{1}{v^2}\,\frac{h''(1) + h'(1)}{h(1)} \leqslant \frac{b}{v} + \frac{1}{v^2}\,\frac{h''(1) + h'(1)}{h(1)}$$

Alegînd $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{u}}$ și $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{v}}$ obținem rezultatul enunțat în teoremă.

Pentru $g(z) \equiv 1$ și $h(z) \equiv 1$ din (9) se obține ordinul de aproximare pentru operatorul Favard-Szasz de două variabile

$$\left|f(x,y) - (S_{u,v}f)(x,y)\right| \leqslant \left(1 + \sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{u}}, \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$$

B I B L I O G R A F I E

1.P.APPELL,Sur une classe de polynomes,Ann.Sci.École Normale Sup.,Paris,(2),9,(1880) pp.119-144.

2.A.CIUPA,On the approximation order of a function by a generalized Szasz operator,Buletin St.Univ.Tehnică Cluj-Napoca (va apare)

3.A.JAKIMOVSKI,D.LEVIATAN,Generalized Szasz operators for the approximation in infinite interval,Mathematica,(Cluj),(34),1969,pp.97-103.

4.B.WOOD,Generalized Szasz operators for the approximation in teh complex domain,Siam.J.Appl.Math.(17),No.4,1969, pg.790-801.

TECHNICAL UNIVERSITY OF CLUJ-NAPOCA
3400 CLUJ-NAPOCA
ROMÂNIA