Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.IX(1993), 33-38

# COMPORTAREA ASIMPTOTICĂ A SOLUŢIILOR UNEI CLASE DE SISTEME NELINIARE HIPERBOLICE

Rodica LUCA-TUDORACHE

Abstract. In this paper we study the asymptotic behaviour of the solutions to a class of hyperbolic systems which occur in integrated circuits modelling.

In această lucrare vom studia comportarea asimptotică a soluţiilor sistemului hiperbolic:

$$\text{(S)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, \dfrac{\partial^k v}{\partial x^k} + \alpha(x,i) = f(t,x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}(a_k(x)i) + \beta(x,v) = g(t,x), \quad 0<x<1,\ t>0 \end{cases}$$

cu condiţia la limită:

$$\text{(BC)}\quad \begin{bmatrix} \mathrm{col}((L_1 i)(t,0), -(L_1 i)(t,1), \ldots, (L_n i)(t,0), -(L_n i)(t,1)) \\ S(\mathrm{col}(\dfrac{dw_1}{dt}(t), \ldots, \dfrac{dw_m}{dt}(t))) \end{bmatrix} \in$$

$$\in -G \begin{bmatrix} \mathrm{col}(v(t,0), v(t,1), \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}(t,0), \dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}(t,1)) \\ \mathrm{col}(w_1(t), \ldots, w_m(t)) \end{bmatrix}, \quad t>0$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\text{(IC)}\quad \begin{cases} i(0,x) = i_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad 0<x<1 \\ w_j(0) = w_{j0}, \quad j=\overline{1,m}, \end{cases}$$

unde $L_j i = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \dfrac{\partial^{k-j}}{\partial x^{k-j}} (a_k(x)i)$, $j=\overline{1,n}$, (n natural $\geq 1$).

Introducem următoarele ipoteze:

(H.1) Funcţiile $a_k \in W^{k,\infty}(0,1)$, $k=\overline{0,n}$, $a_n(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [0,1]$.

(H.2) Funcţiile $x \longrightarrow \alpha(x,p)$ şi $x \longrightarrow \beta(x,p) \in L^2(0,1)$, $\forall\, p \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $p \longrightarrow \alpha(x,p)$ şi $p \longrightarrow \beta(x,p)$ sînt continue şi nedescrescătoare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, a.p.t. $x \in (0,1)$.

(H.3) Operatorul $G : D(G)\subset \mathbb{R}^{2n+m} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n+m})$ este maximal monoton şi se descompune în $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$, unde $G_{11} : D(G_{11})\subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n})$,

$G_{12} : D(G_{12})\subset \mathbb{R}^{m} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n})$, $G_{21} : D(G_{21})\subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{m})$,

$G_{22} : D(G_{22})\subset \mathbb{R}^{m} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{m})$.

(H.4) $S = \mathrm{diag}(s_1,\dots,s_m)$ cu $s_j>0$, $j=\overline{1,m}$.

Introducem în continuare <u>spaţiile</u>: $X = (L^2(0,1))^2$, $\mathbb{R}^m$ şi $Y = X\times\mathbb{R}^m$ cu produsele scalare corespunzătoare:

$$<f,g>_X = \int_0^1 f_1\cdot g_1\,dx + \int_0^1 f_2\cdot g_2\,dx,\quad f = \begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} g_1\\ g_2\end{pmatrix}\in X,$$

$$<x,y>_S = \sum_{i=1}^{m} s_i x_i y_i,\quad x,y\in\mathbb{R}^m,$$

$$<\binom{f}{x},\binom{g}{y}>_Y = <f,g>_X + <x,y>_S,\quad \binom{f}{x},\binom{g}{y}\in Y.$$

Definim <u>operatorul</u> $\mathcal{A} : D(\mathcal{A})\subset Y \longrightarrow Y$, $D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in Y;\ i,v\in H^n(0,1);\ w\in\mathbb{R}^m,\ \begin{pmatrix}\gamma_0 v\\ w\end{pmatrix}\in D(G),\ \gamma_1 i \in -G_{11}(\gamma_0 v)-G_{12}(w)\right\}$ cu $\gamma_0 v = \mathrm{col}(v(0),v(1),\dots, v^{(n-1)}(0),v^{(n-1)}(1))$, $\gamma_1 i = \mathrm{col}((L_1 i)(0),-(L_1 i)(1),\dots,(L_n i)(0),-(L_n i)(1))$ şi $L_j i = \sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}(a_k i)^{(k-j)}$, $j=\overline{1,n}$,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k v^{(k)} \\ -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (a_k i)^{(k)} \\ S^{-1}G_{21}(\gamma_0 v) + S^{-1}G_{22}(w)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in D(\mathcal{A}).$$

Dacă notăm cu $Tv := \sum_{k=0}^{n} a_k v^{(k)}$, atunci operatorul $\mathcal{A}$ se poate exprima mai simplu, astfel:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tv \\ -T^{*}i \\ S^{-1}G_{21}(\gamma_0 v) + S^{-1}G_{22}(w)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in D(\mathcal{A}),$$

unde $T^*$ este adjunctul operatorului $T$.

De asemenea, introducem <u>operatorul</u> $\mathcal{B} : D(\mathcal{B})\subset Y \longrightarrow Y$, $\mathcal{B}\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\cdot,i)\\ \beta(\cdot,v)\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in D(\mathcal{B})$, $D(\mathcal{B}) = \left\{\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in Y;\ \mathcal{B}\begin{pmatrix} i\\ v\\ w\end{pmatrix}\in Y\right\}$.

<u>Observaţie.</u> In ipotezele (H.1)-(H.4) mulţimea $D(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ şi $D(\mathcal{A})\subset D(\mathcal{B})$.

<u>Lema 1.</u> In ipotezele (H.1),(H.3) şi (H.4) operatorul $\mathcal{A}$ este maximal monoton.

Lema 2. In ipotezele (H.1)-(H.4) operatorul $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ este maximal monoton.

Teorema 1. (a) Presupunem ipotezele (H.1)-(H.4) îndeplinite. Dacă $\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathcal{A})}$, iar $f,g \in L^1(0,T;L^2(0,1))$ ($T>0$ fixat) atunci problema (S),(BC), (IC) are o soluţie slabă unică $\begin{pmatrix} i \\ v \\ w \end{pmatrix} \in C([0,T];Y)$, ($w_o = col(w_{1o},\dots,w_{mo})$).

(b) Presupunem ipotezele (H.1)-(H.4) îndeplinite. Dacă $\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$, iar $f,g \in W^{1,1}(0,T;L^2(0,1))$ atunci problema (S),(BC),(IC) are o soluţie tare unică $\begin{pmatrix} i \\ v \\ w \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}(0,T;Y)$. In plus:

$$i,v \in L^{\infty}(0,T;H^n(0,1));\quad \text{deci}\quad \frac{\partial^r i}{\partial x^r},\ \frac{\partial^r v}{\partial x^r} \in L^{\infty}((0,T)\times(0,1)),\ r=\overline{0,n-1}.$$

Pentru demonstraţia Teoremei 1, vezi [4].

Lema 3. Presupunem ipotezele (H.1)-(H.4) îndeplinite. Atunci pentru $\forall \lambda > 0$ operatorul $(I+\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B}))^{-1}$ duce submulţimile mărginite din spaţiul Y în submulţimi mărginite din spaţiul $(H^n(0,1))^2 \times \mathbb{R}^m$, deci operatorul $(I+\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B}))^{-1}$ este compact în spaţiul Y.

Demonstraţia Lemei 3 este asemănătoare cu cea a Lemei 3 din [3].

Să introducem acum următoarele ipoteze suplimentare:

(H.5) Există cel puţin o soluţie $\begin{pmatrix} i \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ a ecuaţiei:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} i \\ v \\ w \end{pmatrix} + \mathcal{B}\begin{pmatrix} i \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

(H.6)' (i) Pentru aproape toţi $x \in (0,1)$, $\alpha(x,.)$ este strict crescătoare.

(ii) G are proprietatea:

(P) $G(col(x_1,x_2,\dots,x_{2n},x_{2n+1},\dots,x_{2n+m})) \cap G(col(y_1,y_2,\dots,y_{2n},y_{2n+1},\dots,y_{2n+m})) \neq \emptyset \Longrightarrow x_{2i} = y_{2i},\ i=\overline{1,n}$ sau $x_{2i-1} = y_{2i-1},\ i=\overline{1,n}$.

(iii) Dacă $x,y \in D(G)$, $x = (x^a,x^b) \in \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^m$, $y = (y^a,y^b) \in \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^m$ cu $x^b \neq y^b$ şi $w_1 \in G(x)$, $w_2 \in G(y)$, atunci:

$$\langle w_1-w_2, x-y\rangle_{\mathbb{R}^{2n+m}} > 0.$$

şi

(H.6)" (i) Pentru aproape toţi $x \in (0,1)$, $\beta(x,.)$ este strict crescătoare.

(ii) $G^{-1}$ are proprietatea (P).

(iii) Proprietatea (iii) de la (H.6)'.

Teorema 2. Presupunem ipotezele (H.1)-(H.6)' sau (H.1)-(H.6)" satisfăcute, iar $\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathcal{A})}$, $f,g \in L^1(\mathbb{R}_+;L^2(0,1))$. Fie $\begin{pmatrix} i(t,.) \\ v(t,.) \\ w(t) \end{pmatrix}$ soluţia corespunzătoare (slabă) a problemei (S),(BC),(IC). Atunci soluţia ecuaţiei (1) este unică, s-o notăm cu $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ şi

(2) $$\begin{pmatrix} i(t,.) \\ v(t,.) \\ w(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \text{ pentru } t \longrightarrow \infty, \text{ în } Y.$$

Dacă, în plus, $\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$, iar $f,g \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+;L^2(0,1))$, atunci:

(3) $$\frac{\partial^j i}{\partial x^j}(t,.) \longrightarrow p^{(j)}, \quad \frac{\partial^j v}{\partial x^j}(t,.) \longrightarrow q^{(j)}, \text{ pentru } t \longrightarrow \infty, \text{ în } C([0,1]),\ j=\overline{0,n-1}.$$

<u>Demonstraţie.</u> (schiţă) Presupunem fără a restrînge generalitatea problemei că operatorii G şi $\mathcal{A}$ sînt univoci. Conform unei teoreme de comparaţie (vezi [5], p.77) putem presupune că $f\equiv 0$ şi $g\equiv 0$. Folosind Lema 3 şi Propoziţia 2.5 din [5], p.108 rezultă că orbita:

$$\gamma\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} = \left\{ S(t)\begin{pmatrix} i_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} ;\ t\geq 0 \right\}$$

este relativ compactă în spaţiul Y, unde $\{S(t);\ t\geq 0\}$ este semigrupul generat de operatorul $-(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Notăm cu F mulţimea punctelor fixe ale semigrupului S(t), adică $F = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^{-1}(0)$. Conform ipotezei (H.5), $F \neq \emptyset$. Vom demonstra că F are un singur element.

Pentru aceasta, fie $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar p \\ \bar q \\ \bar r \end{pmatrix} \in F$. Avem:

$$\left< (\mathcal{A}+\mathcal{B})\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - (\mathcal{A}+\mathcal{B})\begin{pmatrix} \bar p \\ \bar q \\ \bar r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-\bar p \\ q-\bar q \\ r-\bar r \end{pmatrix} \right>_Y = 0 .$$

Din definiţiile operatorilor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ relaţia de mai sus ne dă:

(4) $$\left< G\begin{pmatrix} \gamma_o q \\ r \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} \gamma_o \bar q \\ \bar r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_o(q-\bar q) \\ r-\bar r \end{pmatrix} \right>_{\mathbb{R}^{2n+m}} + \int_0^1 [\alpha(x,p)-\alpha(x,\bar p)](p-\bar p)dx + \int_0^1 [\beta(x,q)-\beta(x,\bar q)](q-\bar q)dx = 0,$$

cu $\gamma_1 p = -G_{11}(\gamma_o q)-G_{12}(r)$, $\gamma_1 \bar p = -G_{11}(\gamma_o \bar q)-G_{12}(\bar r)$.

Folosind monotonia operatorului G şi a funcţiilor $\alpha$ şi $\beta$ obţinem:

(5) $$[\alpha(x,p(x)) - \alpha(x,\bar p(x))].[p(x)-\bar p(x)] = 0, \quad \text{a.p.t. } x\in(0,1),$$

(6) $$[\beta(x,q(x)) - \beta(x,\bar q(x))].[q(x)-\bar q(x)] = 0, \quad \text{a.p.t. } x\in(0,1).$$

Presupunem ipoteza (H.6)' satisfăcută. Atunci, din (5) rezultă $p=\bar p$, iar din relaţiile:

$$\begin{cases} Tq + \alpha(.,p) = 0 \\ -T^{*}p + \beta(.,q) = 0 \\ S^{-1}G_{21}(\gamma_0 q) + S^{-1}G_{22}(r) = 0 \\ \gamma_1 p = -G_{11}(\gamma_0 q) - G_{12}(r) \end{cases}, \qquad \begin{cases} T\bar{q} + \alpha(.,\bar{p}) = 0 \\ -T^{*}\bar{p} + \beta(.,\bar{q}) = 0 \\ S^{-1}G_{21}(\gamma_0 \bar{q}) + S^{-1}G_{22}(\bar{r}) = 0 \\ \gamma_1 \bar{p} = -G_{11}(\gamma_0 \bar{q}) - G_{12}(\bar{r}) \end{cases}$$

obţinem:

(7) $\quad Tq = T\bar{q}$

şi

(8) $\quad G\begin{pmatrix} \gamma_0 q \\ r \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} \gamma_0 \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix}$.

Folosind proprietatea (P) din (8) deducem:

(9) $\quad q^{(j)}(0) = \bar{q}^{(j)}(0),\ j=\overline{0,n-1}$,

sau

(10) $\quad q^{(j)}(1) = \bar{q}^{(j)}(1),\ j=\overline{0,n-1}$.

Atunci, cu ajutorul teoremei de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior, din relaţiile (7) şi (9) obţinem $q = \bar{q}$. Analog (7) şi (10) implică $q = \bar{q}$.

Din relaţia (4) şi ipoteza (H.6)'(iii) rezultă $r = \bar{r}$. Deci $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix}$, adică F are un singur element.

In mod asemănător, se arată că şi în ipoteza (H.6)" obţinem $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix}$. Deci, $F = \left\{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right\}$.

Să notăm acum:

$$\omega\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Y;\ \exists\, t_m \longrightarrow \infty \text{ astfel încît } S(t_m)\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\right.$$

pentru $m \longrightarrow \infty$, tare în Y$\}$. Pentru a demonstra (2), putem presupune, folosind Propoziţia 2.4 din [5], p.107, că $\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$. Atunci, conform Teoremei 2.8 din [5], p.121, avem $\omega\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \subset D(\mathcal{A})$. Fie $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \omega\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ arbitrar, dar fixat. Atunci $S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ satisface ecuaţia:

(11) $$\frac{d^+}{dt} S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (\mathcal{A}+\mathcal{B})\left(S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+ .$$

Pe de altă parte, Teorema 2.7 din [5], p.118, ne arată că:

(12) $$\left\| S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\|_Y = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\|_Y = \text{const.},\ t \in \mathbb{R}_+ .$$

Inmulţind (11) cu $S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ în spaţiul Y şi folosind relaţia (12), obţinem:

$$< (\mathcal{A}+\mathcal{B}) \left(S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right),\ S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} >_Y = 0,\ t\in\mathbb{R}_+.$$

Să notăm cu $\begin{pmatrix} \tilde{i}(t,.) \\ \tilde{v}(t,.) \\ \tilde{w}(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Deci, avem:

$$< (\mathcal{A}+\mathcal{B}) \begin{pmatrix} \tilde{i}(t,.) \\ \tilde{v}(t,.) \\ \tilde{w}(t) \end{pmatrix} - (\mathcal{A}+\mathcal{B})\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \tilde{i}(t,.) \\ \tilde{v}(t,.) \\ \tilde{w}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} >_Y = 0,\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Folosind aceleaşi argumente de mai sus, din (13) obţinem că pentru $\forall\ t\in\mathbb{R}_+$:

$$[\alpha(x,\tilde{i}(t,x)) - \alpha(x,p(x))].[\tilde{i}(t,x) - p(x)] = 0,\quad \text{a.p.t. } x\in(0,1), \tag{14}$$

$$[\beta(x,\tilde{v}(t,x)) - \beta(x,q(x))].[\tilde{v}(t,x) - q(x)] = 0,\quad \text{a.p.t. } x\in(0,1). \tag{15}$$

Să presupunem ipoteza (H.6)' satisfăcută. Atunci, din (14) obţinem $\tilde{i}(t,.) = p$, $\forall\ t\in\mathbb{R}_+$; în particular, a=p, iar din (11) deducem că pentru $\forall t\in\mathbb{R}_+$:

$$T\tilde{v}(t,.) = Tq \quad \text{şi} \quad G\begin{pmatrix} \gamma_0\tilde{v}(t,.) \\ \tilde{w}(t) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} \gamma_0 q \\ r \end{pmatrix}.$$

Folosind proprietatea (P) rezultă că $\tilde{v}(t,.) = q$, deci b = q. Din (13) obţinem că pentru $\forall\ t\geq 0$, $\tilde{w}(t) = r$, deci c = r. Deci $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. Situaţia (H.6)" fiind asemănătoare cu (H.6)', obţinem în ambele cazuri că $\omega\begin{pmatrix} i_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\right\}$, adică tocmai (2).

Demonstraţia relaţiei (3) este asemănătoare cu cea a Teoremei 2 din [4].

q.e.d.

## Bibliografie


1. V.Barbu, "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces", Noordhoff, Leyden, 1976.
2. R.Luca and G.Moroşanu, Hyperbolic problems in integrated circuits modelling, Studii şi cercetări matematice, tom 44, nr.5(1992), p.355-373.
3. R.Luca and G.Moroşanu, On a class of nonlinear hyperbolic systems, Memoriile secţiilor ştiinţifice ale Academiei Române, în press.
4. R.Luca-Tudorache, Probleme mixte pentru o clasă de sisteme neliniare hiperbolice, va apare.
5. G.Moroşanu, "Nonlinear Evolution Equations and Applications", D.Reidel, Dordrecht, 1988.



INSTITUTUL POLITEHNIC IAŞI

IAŞI

ROMÂNIA