Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.IX(1993), 57-66

DESPRE SPECTRUL OPERATORILOR DE PERMUTARE

Béla FINTA

Abstract. The spectrum of the bilateral shift it is well known (see [1] or [2]). In this paper we give the spectrum and the point spectrum for a classe of linear, continuous operators determined by integer numbers permutations.

Notaţiile N,Z,R,C sunt cele uzuale. Notăm cu $N_n=\{0,1,2,...,n\}$ pentru $n\in N^*$. Dacă $\varphi: Z \to Z$ este o permutare, adică o bijecţie pe Z, atunci $\varphi^{-1}: Z \to Z$ este tot o permutare. Dacă notăm cu $P(Z)=\{\varphi: Z \to Z | \varphi$ permutare$\}$, atunci P(Z) este un grup cu operaţia uzuală de compunere a funcţiilor. Fie $l^2(Z) = \{f:Z \to C/\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^2<\infty\}$ spaţiul Hilbert ca spaţiu de bază.

Definim $U_\varphi: l^2(Z) \to l^2(Z)$ cu formula $(U_\varphi f)(k)=f(\varphi^{-1}(k))$ pentru $\forall k\in Z$. U_φ este bine definit: $\forall f\in l^2(Z)$

$$\|U_\varphi f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} | f(\varphi^{-1}(k)) |^2 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} | f(l) |^2 = \|f\|^2 < +\infty$$

fiindcă orice rearanjare a unei serii absolut convergente este convergentă cu aceeaşi sumă. Pe U_φ vom numi operator de permutare. Evident U_φ este linear, continuu cu norma $\|U_\varphi\| = 1$.

În particular, $\varphi_0: Z \to Z$, $\varphi_0(k) = k+1$, $\forall k\in Z$, ne dă şiftul bilateral. Determinăm operatorul adjunct pentru U_φ: $\forall f,g\in l^2(Z)$, obţinem

$$(U_\varphi f,g) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\varphi^{-1}(k))\cdot\overline{g(k)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(l)\cdot\overline{g(\varphi(l))} = (f,U_{\varphi^{-1}}(g))$$

deoarece din inegalitatea lui Cauchy seria anterioară este absolut convergentă. Aşadar $U_\varphi^* = U_{\varphi^{-1}}$. Dacă $M = \{U_\varphi \ / \ \varphi \in P(Z)\}$, atunci M este un grup faţă de compunerea operatorilor şi $\psi: P(Z) \to M$, $U(\varphi)=U_1$, $\forall \varphi \in P(Z)$ este un izomorfism de grupuri. Prin urmare

$$U_\varphi \circ U_\varphi^* = U_\varphi \circ U_{\varphi^{-1}} = I = U_{\varphi^{-1}} \circ U_\varphi = U_\varphi^* \circ U_\varphi$$

deci U_φ este un operator unitar pe $l^2(Z)$. Este cunoscut faptul (vezi [2]), că spectrul lui U_φ, $\tau(U_\varphi) \subset T$, unde T este torul $\{z \in \mathbf{C}, |z|=1\}$.

Pentru $n \in N^*$, fie $\varphi \in P(Z)$ următoarea permutare:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \ldots -n & \ldots -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots n-1 & n & n+1 & \ldots \\ \ldots -n & \ldots -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \ldots n & 1 & n+1 & \ldots \end{pmatrix}$$

Se observă că φ este compus din ciclul $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$ şi din identitatea pentru celelalte numere, deci este un ciclu de rang n. Pentru n=1 şi n=2 se obţine aplicaţia identică respectiv o transpoziţie.

Lema 1. *Dacă φ este un ciclu de rang n, atunci*

$$\sigma(U_\varphi) = \sigma_p(U_\varphi) = \{\omega \in \mathbf{C} \ / \ \omega^n = 1\}$$

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ cu $\lambda \in \sigma_p(U_\varphi)$, deci există $f \in l^2(Z)$, $f \neq 0$ astfel încât $U_\varphi f = \lambda f$. Pentru $f \neq 0$ există $k \in Z$ astfel ca $f(k) \neq 0$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că alegem pentru φ permutarea (*). Dacă $k \notin N_n$, atunci $(U_\varphi f)(k) = f(k) = \lambda \cdot f(k)$, rezultă $\lambda = 1 \in \sigma_p(U_\varphi)$. Dacă $k \in N_n$, atunci din relaţiile $f(k) = \lambda f(k+1), \ldots$ $\ldots, f(n-1) = \lambda \cdot f(n)$, $f(n) = \lambda f(1)$, $f(1) = \lambda f(2), \ldots, f(k-1) = \lambda f(k)$ deducem că $f(k) = \lambda^n f(k)$ adică $\lambda^n = 1$.

Invers, dacă $\lambda=\omega$, cu $\omega^n=1$, definim $f\in l^2(Z)$, $f(k)=\omega^{-k}$, pentru $k\in N_n$ și $f(k)=0$ pentru $k\notin N_n$. Rezultă că $f\neq 0$ și $U_\varphi f=\omega\cdot f$, adică $\lambda\in\sigma_p(U_\varphi)$. Prin urmare $\sigma_p(U_\varphi=\{\omega\in\mathbf{C}\ /\ \omega^n=1\}$. Dacă $\Theta\in[0,2\pi]$ și $e^{i\Theta}\notin\sigma_p(U_\varphi)$, atunci $e^{in\Theta}\neq 1$.

În acest caz se va arăta în lema 2 că există $\varepsilon>0$ astfel încât

$$\|(U_\varphi-e^{i\theta})f\|\geq\varepsilon\cdot\|f\|\ \textit{pentru}\ \forall f\in l^2(Z)$$

În mod analog rezultă că există $\varepsilon'>0$ astfel ca $\|(U_\varphi^*-e^{i\theta})f\|=$

$=\|(U_{\varphi^{-1}}-e^{i\theta})f\|\geq\varepsilon'\|f\|$ pentru orice $f\in l^2(Z)$. În sfârșit se aplică următorul rezultat: operatorul U este inversabil dacă și numai dacă U și adjunctul său U^* sunt mărginite inferior (vezi [1]). Prin urmare $U_\varphi-e^{i\theta}$ este inversabil și $e^{i\theta}\notin\sigma(U_\varphi)$.

În cele ce urmează demonstrăm:

Lema 2. *Dacă φ este un ciclu de ordinul n, și $\Theta\in[0,2\pi)$, cu $e^{in\Theta}\neq 1$, atunci există $\varepsilon>0$ astfel ca* $\|(U_\varphi-e^{i\theta})f\|\geq\varepsilon\|f\|$.

<u>Demonstrație</u>: La început arătăm că pentru $z_k\in C$, cu $k=1, n+1$ există constantele $\alpha>0$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n}|z_{k+1}-e^{i\theta}z_k|^2\geq\alpha\cdot\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$, cu condiția $z_{n+1}=z_1$. Inegalitatea este echivalentă cu

$$2\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-2\sum_{k=1}^{n}\cdot Re\cdot z_{k+1}\cdot\overline{z_k}e^{-i\theta}\geq\alpha\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$$

respectiv cu $[(2-\alpha)/2]\cdot\sum_{k=1}^{n}|Z_k|^2\geq\sum_{k=1}^{n}Re\cdot Z_{k+1}\cdot\overline{Z_k}\cdot e^{-i\theta}$.

Transcriem inegalitatea în formă polară. Atunci $z_k=r_k\cdot e^{i\Theta k}$ pentru $k=1, n+1$, și cerem existența constantei β cu $\beta<1$ astfel ca inegalitatea $\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot r_{k+1}\cdot\cos(\theta_{k+1}-\theta_k-\theta)\leq\beta\cdot\sum_{k=1}^{n}r_k^2$ să fie adevărată pentru $\Theta_k\in[0,2\pi)$ și $\Gamma_k\in[0,+\infty)$, unde $k=1, n+1$. Dacă $\sum_{k=1}^{n}r_k^2=0$, adică $r_k=0$

pentru $\forall k=\overline{1,n}$ o astfel de constantă β există. Dacă $\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \neq 0$, putem presupune că $\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = 1$, fiindcă altfel inegalitatea o putem împărți cu $\sum_{k=1}^{n} r_k^2$. Să introducem funcţia $F:[0,1]^n x[-2\pi-\theta,2\pi-\theta]^n \to \mathbb{R}$ dată prin formula: $f(s_1,s_2,\ldots,s_n,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot s_{k+1} \cdot \cos\alpha_k$, unde

$s_k=r_k$, $s_k\in[0,1]$, $k=\overline{1,n}$ şi $\sum_{k=1}^{n} s_k^2=1$ şi unde

$\alpha_k = \theta_{k+1}-\theta_k-\theta$, $\alpha_k\in[-2\pi-\theta,2\pi-\theta]$, $k=\overline{1,n}$ şi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -n\theta$.

Din inegalităţile următoare:

$$F(s_1,s_2,\ldots,s_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \le |F(s_1,\ldots,s_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \cdot s_{k+1} \mid \cos \alpha_k \mid \le \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot s_{k+1} \le 1$$

deducem că egalitatea $F(s_1,\ldots,s_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$ are loc numai în cazul $s_k = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\cos\alpha_k=1, k=\overline{1,n}$. Pentru $\alpha_k\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $k=\overline{1,n}$ rezultă că $n\theta\equiv 0 \pmod{2\pi}$, adică există $m\in N_n$, astfel încât $\theta=2\pi m/n$. Prin urmare dacă alegem $\theta\in[0,2\pi)$ astfel ca $e^{in\theta}\neq 1$, atunci există $l\in N_n$ cu $\alpha_l\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ şi prin urmare avem inegalitatea strictă $F(s_1,\ldots,s_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)<1$.

Funcţia F este continuă pe domeniul său de definiţie:

$$D = \{(s_1,\ldots,s_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in[0,1]^n x[-2\pi-\theta,2\pi-\theta]^n \,/$$

$$/ \sum_{k=1}^{n} s_k^2=1 \;\; si \;\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n\theta\}$$

care este o mulţime compactă. Dacă notăm cu γ valoarea maximă a lui F pe D, din teorema lui Weierstrasse avem $\gamma<1$. În sfârşit alegem

$\varepsilon = \min\{\sqrt{\alpha},\ |1-e^{i\theta}|\} > 0$, căci $e^{in\theta}\neq 1$, $f(k)=z_k$ pentru $k=1,n$ şi prin urmare:

$$\|(U_\varphi - e^{i\theta})f\|^2 = (\sum_{k\in N_n}|f(k)|^2)\cdot|1-e^{i\theta}|^2 + \sum_{k=1}^{n-1}|f(k+1) - e^{i\theta}f(k)|^2 +$$
$$+ |f(1) - e^{i\theta}f(n)|^2 \geq \varepsilon^2\cdot\sum_{k\in N}|f(k)|^2 = \varepsilon^2\cdot\|f\|^2 \quad q.e.d.$$

Remarcăm că dacă φ este o transpoziţie, putem să evaluăm constanta α prin calcul direct: $\alpha = |\cos\theta|<1$.

În continuare să considerăm câteva definiţii şi rezultatul principal al lucrării.

Presupunem mai general, că permutarea φ este un ciclu finit de rang $n\in N^*$, dacă există o submulţime $\{k_1,k_2,\dots,k_n\}\subset Z$ astfel încât $\varphi(k_1) = k_2, \varphi(k_2) = k_3,\dots,\varphi(k_n) = k_1$ si pentru $k \notin \{k_1,k_2,\dots,k_n\}$, $\varphi(k)=k$. P(Z) este un ciclu infinit, dacă există $k_0\in Z$ astfel încât mulţimea $A=\{\varphi^k(k_0)/k\in Z\}$ este infinită, şi pentru $k\notin A$ avem $\varphi(k)=k$. De exemplu, permutarea identică este limită de rang unu şi permutarea φ_0 corespunzător şiftului bilateral este un ciclu infinit.

Lema 3. *Orice permutare $\varphi\in P(Z)$ poate fi scrisă ca o compunere finită sau infinită de cicluri finite sau infinite.*

<u>Demonstraţie</u>: Fie $A_1=\{\varphi^k(0)\ /\ k\in Z\}$ şi să definim $\varphi_1:Z \to Z$, $\varphi_1(k)=\varphi(k)$ pentru $k\in A_1$ şi $\varphi_1(k)=k$ pentru $k\notin A_1$.
Dacă $\varphi=\varphi_1$, atunci φ este un ciclu finit sau infinit, altfel putem alege cel mai mic număr în valoarea absolută $a_1\in Z - A_1$, pentru care $\varphi(a_1)=a_1$. Fie $A_2=\{\varphi^k(a_1)\ /\ k\in Z\}$ şi definim în acelaşi mod φ_2: $Z \to Z$ cu $\varphi_2(k)=\varphi(k)$ pentru $k\in A_2$ şi $\varphi_2(k)=k$, pentru $k\notin A_2$.
Se observă că $A_1\cap A_2=\emptyset$. Dacă $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2=\varphi_2\circ\varphi_1$, atunci φ este compunerea a două cicluri, finite sau infinite. Altfel putem să alegem cel mai mic număr în valoare absolută $a_2\in Z-(A_2\cup A_2)$ pentru care $\varphi(a_2)\neq a_2$ şi aşa mai departe. Acest procedeu exhaustează toate numerele întregi.

Teoremă. *Fie φ o permutare şi să considerăm descompunerea ei în cicluri corespunzător lemei anterioare.*

1. Dacă φ este un ciclu de rang n, atunci

$$\sigma(U_\varphi) = \sigma_p(U_\varphi) = \{\, \omega \in \mathbf{C} \ / \ \omega^n = 1 \,\} \ .$$

2. Dacă descompunerea lui φ este formată numai dintr-un număr finit sau infinit numărabil de cicluri finite de rang $n_1, n_2, \dots, n_m$ atunci

$$\sigma(U_\varphi) = \sigma_p(U_\varphi) = \{\, \omega \in \mathbf{C} \ / \ \omega^{n_1} = 1 \ \ sau \ \ \omega^{n_2} = 1 \ \ sau \dots sau \ \ \omega^{n_m} = 1 \,\} \ .$$

3. Dacă descompunerea este formată numai din cicluri finite, al căror rang $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$ tinde către infinit atunci:

$$\sigma(U_\varphi) = T, \ \sigma_p(U_p) = \{\, \omega \in \mathbf{C} \ / \ \omega^{n_1} = 1, \ \ sau \ \ \omega^{n_2} = 1 \ \ sau \ \ \dots \}$$

4. Dacă descompunerea lui φ conţine cel puţin un ciclu infinit, atunci $\sigma(U_\varphi)=T$. Dacă în descompunerea lui φ pe lângă ciclurile infinite sânt şi cicluri finite, atunci $\sigma_p(U_\varphi)$ coincide fie cu $\sigma_p(U_\varphi)$ din 2, fie cu $\sigma_p(U_\varphi)$ din 3, altfel $\sigma_p(U_\varphi)=\emptyset$.

<u>Demonstraţie</u>:

1. Demonstraţia este identică cu demonstraţia din lema 1, unde $1,2,\dots, n$ sânt înlocuite prin $k_1, k_2, \dots, k_n$.

2. Fie $U_\varphi = U_{\varphi_1} \circ U_{\varphi_2} \circ \dots \circ U_{\varphi_m}$, sau $U_\varphi = U_{\varphi_1} \circ \dots \circ U_{\varphi_m} \circ U_{\varphi_{m+1}} \circ \dots$ unde rangul lui U_{φ_l} este unul din numerele $n_1, n_2, \dots, n_m$ pentru $l \in \mathbf{N}_m$ respectiv $l \in \mathbf{N}$.

Dacă $\lambda \in \mathbf{C}$ este astfel ales încât $U_\varphi f = \lambda \cdot f$ pentru $f \neq 0$ putem alege $i \in Z$ cu $f(i) \neq 0$. Dacă $i \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ sau $i \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$, atunci din $(U_\varphi f)(i) = f(\varphi^{-1}) = \lambda \cdot f(i)$ obţinem

$$\lambda = 1 \in \sigma_p(U_\varphi) \ .$$

Dacă $i \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ sau $i \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$ atunci există un singur număr $l \in \mathbf{N}_m$ astfel încât

$i \in A_l = \{\varphi(a_{l-1}, \dots, \varphi^{n_l}(a_{l-1}) = a_{l-1}\}$. Să alegem $s \in \mathbf{N}_m$, astfel încât $i = \varphi^s(a_{l-1})$. Din relaţiile:

$$f(\varphi^s(a_{l-1}) = \lambda \cdot f(\varphi^{s+1}(a_{l-1})), \dots,$$

$$f(\varphi^{n_l-1}(a_{l-1})) = \lambda\cdot f(\varphi^{n_l}(a_{l-1})),$$

$$f(\varphi^{n_l}(a_{l-1})) = \lambda\cdot f(\varphi(a_{l-1})),$$

$$f(\varphi(a_{l-1})) = \lambda\cdot f(\varphi^2(a_{l-1})),\dots,$$

$$f(\varphi^{s-1}(a_{l-1})) = \lambda\cdot f(\varphi^{s}(a_{l-1}))$$, deducem că

$$f(\varphi^{s}(a_{l-1})) = \lambda^{n_l}\cdot f(\varphi^{s}(a_{l-1}))$$, adică $\lambda^{n_l} = 1$.

Invers, dacă $\lambda = \omega$, cu $\omega^{n_l}=1$, unde $l \in \mathbb{N}_m$, definim $f \in l^2(\mathbb{Z})$,

$f(\varphi^s(a_{l-1}))=\omega^{-1}$ pentru $s=1,n_l$ şi $f(m)=0$, dacă $m\notin A_l$. Atunci $f\neq 0$ şi $U_\varphi f=\omega f$, adică $\lambda\in\sigma_p(U_\varphi)$.

Prin urmare $\sigma_p(U_\varphi) = \{\ \omega\in\sigma\ /\ \omega^{k_1} = 1\ \textit{sau}\dots\textit{sau}\ \ \omega^{k_n} = 1\ \}$.

Dacă $\theta\in[0,2\pi)$ şi $e^{i\theta}\notin\sigma_p(U_\varphi)$ arătăm că U_φ şi U_φ^* sunt mărginite inferior.Prima parte din lema 2, asigură existenţa numerelor $\varepsilon_l>0$ pentru fiecare $l\in\mathbb{N}_m$ astfel că

$$\sum_{s=1}^{n_l-1} |f(\varphi^{s+1}(a_{l-1} - e^{i\theta}f(\varphi^{s}(a_{l-1}))|^2 + |f(\varphi(a_{l-1})) - e^{i\theta}f(\varphi^{n_l}(a_{l-1}))|^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon_l^2 \cdot \sum_{s=1}^{n_l} (f(\varphi^{s}(a_{l-1}))|^2$$

Alegem $\varepsilon = \min\{\ |1-e^{i\theta}|,\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ şi obţinem

$$\|(U_\varphi-e^{i\theta})f\|^2 = (\textstyle\sum_{m\,\in\,A_1\cup\dots\cup A_n} |f(m)|^2)\cdot|1-e^{i\theta}|^2 +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(\sum_{s=1}^{n_l-1}\ |\ f(\varphi^{s+1}(a_{l-1}) - e^{i\theta}\cdot f(\varphi^{s}(a_{l-1}))|^2 +$$

$$|f(\varphi(a_{l-1})) - e^{i\theta}f(\varphi^{n_l}(a_{l-1}))|^2) \geq \varepsilon^2\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^2 = \varepsilon^2\cdot\|f\|^2$$

3. Pentru a arăta

$$\sigma_p(U_\varphi) = \{ \omega\in\mathbf{C} \,/\, \omega^{k_1} = 1 \ \ sau \ldots sau \ \ \omega_n^{k_n} = 1 \ \ sau \ldots\}$$

putem să raționăm în mod analog ca în prima parte a lui 2. Pentru orice $\Theta\in[0,2\pi)$ și pentru orice ε, $\varepsilon'>0$ există $m'/n'\in Q$ astfel încât $(\Theta-2\pi m'/n') < \varepsilon$, și din continuitatea funcției exponențiale rezultă că există $m/n\in Q$ astfel încât $|e^{i\Theta} - e^{i\,2\pi m/n}|<\varepsilon$. Menționăm că pentru $\varepsilon>0$ fixat, noi putem alege $n \in \{n_1, n_2, \ldots\}$ și $m\in Z$ astfel ca prima inegalitate de aproximare să fie adevărată, deoarece șirul $\{n_1\}$ tinde către infinit.

Rezultă că $\sigma_p(U_\varphi)$ este o submulțime densă a lui T. Este bine cunoscut faptul că spectrul unui operator linear și continuu este compact, în particular închis (vezi [1]).

Prin urmare $T=\sigma_p(U_\varphi) \subset \sigma(U_\varphi)$, deci $\sigma(U_\varphi) = T$.

4. Mai sus am menționat faptul că $\sigma(U_\varphi) \subset T$. Fără a restrânge generalitatea putem să presupunem că permutarea φ_1, corespunzător operatorului U_{φ_1} în descompunerea lui U_φ este infinită. Pentru un $\Theta \in [0, 2\pi)$ dat și pentru orice $n \in \mathbf{N}$ fie f_n următorul vector din $l^2(Z)$: $f_n(\varphi^k(0)) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-ik\theta}$ pentru $|k|\le n$ și altfel ia valoarea 0. Un calcul direct arată că f_n este un vector unitate și că $\lim\limits_{n\to\infty}\|(U_\varphi - e^{i\theta}) f_n\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} 2 / (2n+1) = 0$.

Prin urmare $U_\varphi-e^{i\Theta}$ nu este mărginit inferior, deci $e^{i\Theta}\in\sigma(U_\varphi)\subset T$, adică $\sigma(U_\varphi)=T$. Pentru a afla spectrul punctual fie $\lambda\in\mathbf{C}$ o valoare proprie, iar $f\neq0$ vectorul propriu corespunzător. Atunci există $i\in Z$ astfel ca $f(i) \neq 0$. Să presupunem că $i \in A_1 = \{\varphi^k(0) \,/\, k \in Z\}$.

Din $f(i) = (U_\varphi f)(\varphi(i)) = \lambda\cdot f(\varphi(i))$ obținem că $\lambda \neq 0$.

Din relațiile $f(\varphi^{k-1}(0)) = (U_\varphi f)(\varphi^k(0) = \lambda f(\varphi^k(0))$ rezultă că

$\|f\|^2 \ge \sum_{k\in Z} |f(\varphi^k(0))|^2 = 1 + \sum\limits_{k\ge1} |\lambda|^k + \sum\limits_{k\ge1} 1/|\lambda|^k$ care este o serie

divergentă pentru orice $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Prin urmare $i \notin A_1$, şi în mod analog se arată că orice alt ciclu infinit nu contribuie la spectrul punctual al operatorului iniţial U_φ. Deci pentru spectrul punctual rămân valabile formulele de la 2 şi 3.

B I B L I O G R A F I E

1. HALMOS, P.R.: A Hilbert Space Problem Book, Second Edition, Springer Verlag, New York, 1982.

2. DOUGLAS, R.D.: Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York and London, 1972.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
TÎRGU MUREŞ
ROMÂNIA