Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.IX(1993), 67-72

ELEMENTE COMUTABILE ÎN LATICI NECOMUTATIVE DE TIP (I)

Gheorghe FĂRCAŞ

Noncommutative lattices of type (I) was defined in [3]. In this articole we introduce the notion of commutative element and we give 10 diferent equivalentes proprietes for these elements.

1. Laticile necomutative de tip (I) au fost definite în [3] cu ajutorul unei mulţimi L, înzestrată cu două operaţii binare $\wedge$ şi $\vee$, astfel încât pentru orice $x,y,z\in L$ tripletul $(L,\wedge,\vee)$ verifică axiomele:

$$\text{(A)}. \quad \begin{cases} (x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z) \\ (x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z) \end{cases}$$

$$\text{(B)}. \quad \begin{cases} x\wedge(x\vee y) = x \\ x\vee(x\wedge y) = x. \end{cases}$$

Obţinem un exemplu de latice necomutativă de tip (I) dacă în produsul cartezian $\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M) = \{(A,B)/A\subseteq M \text{ şi } B\subseteq M\}$, unde M este o mulţime, se definesc operaţiile binare $\wedge$ şi $\vee$ astfel:

$$(A_1,B_1)\wedge(A_2,B_2) = (A_1,B_2)$$
$$(A_1,B_1)\vee(A_2,B_2) = (A_2,B_1).$$

Se constată că în $(\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M),\wedge,\vee)$ nu sunt satisfăcute legile comutativităţii.

(1.1). Dcă $(L,\wedge,\vee)$ este latice necomutativă de tip (I), atunci pentru orice $a\in L$ sunt adevărate egalitățile:

$$\text{(I)}. \begin{cases} x\wedge x = x \\ x\vee x = x\,, \end{cases}$$

adică legile idempotenței.

<u>Demonstrație</u>. Utilizând axiomele de absorbție (B) obținem că pentru orice $x,y\in L$, $x\wedge x=x\wedge[x\vee(x\wedge y)]=x$ și respectiv $x\vee x=x\vee[x\wedge(x\vee y)]=x$

2. În această lucrare introducem noțiunea de element comutabil al unei latici necomutative de tip (I) și arătăm că acesta poate fi caracterizat în mai multe moduri diferite.

<u>Definiție</u>. Fie $(L,\wedge,\vee)$ o latice necomutativă de tip (I). Elementul $c\in L$ se numește comutabil dacă pentru orice $x\in L$ satisface condițiile:

$$\text{(C)}. \begin{cases} x\wedge c = c\wedge x \\ x\vee c = c\vee x\,. \end{cases}$$

(2.1). Dacă laticea necomutativă $(L,\wedge,\vee)$ de tip (I) posedă element zero sau element unitate, adică există $0\in L$ sau $1\in L$ astfel încât pentru orice $x\in L$,

(1). $x\wedge 0=0$ și $0\vee x=x$

respectiv,

(2). $1\wedge x=x$ și $x\vee 1=1$,

atunci aceste elemente sunt comutabile.

<u>Demonstrație</u>. Utilizând axiomele de absorbție (B), pentru orice $x\in L$ obținem $0\wedge x=0\wedge(0\vee x)=0$ și $x\vee 0=x\vee(x\wedge 0)=x$, deci $x\wedge 0=0\wedge x$ și $x\vee 0=0\vee x$, adică $0\in L$ este comutabil. De asemenea, pentru orice $x\in L$, $x\wedge 1=x\wedge(x\vee 1)=x$ și $1\vee x=1\vee(1\wedge x)=1$, deci $x\wedge 1=1\wedge x$ și $x\vee 1=1\vee x$, adică $1\in L$ este comutabil.

Dacă mulțimea $\{a,b,c,d\}$ definim operațiile binare $\wedge$ și $\vee$ prin tabelele 1 și 2, atunci $(\{a,b,c,d\},\wedge,\vee)$ este latice necomutativă de tip (I) în care elementele a și b sunt comutabile, a fiind și element zero.

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	d	d

TABELA 1

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	c
d	d	d	d	d

TABELA 2

(2.2). Dacă $(L,\wedge,\vee)$ este latice necomutativă de tip (I) și $c\in L$, atunci pentru orice $x,y\in L$ următoarele 10 afirmații sunt logic echivalente:

(C_1). $c\in L$ este comutabil

(C_2). $\begin{cases} c\wedge x\wedge c = x\wedge c\wedge x \\ c\vee x\vee c = x\vee c\vee x \end{cases}$

(C_3). $\begin{cases} c = c\wedge x \Rightarrow y\wedge c = x\wedge c\wedge y \\ c = c\vee x \Rightarrow y\vee c = x\vee c\vee y \end{cases}$

(C_4). $\begin{cases} x = x\wedge c \Rightarrow c\vee y = y\vee x\vee c \\ x = x\vee c \Rightarrow c\wedge y = y\wedge x\wedge c \end{cases}$

(C_5). $\begin{cases} x = x\wedge c \Rightarrow c\vee y = y\vee c\vee x \\ x = x\vee c \Rightarrow c\wedge y = y\wedge c\wedge x \end{cases}$

(C_6). $\begin{cases} x = x\wedge c \Rightarrow y\vee c = x\vee c\vee y \\ x = x\vee c \Rightarrow y\wedge c = x\wedge c\wedge y \end{cases}$

(C_7). $\begin{cases} x = x\wedge c \Rightarrow y\vee c = c\vee x\vee y \\ x = x\vee c \Rightarrow y\wedge c = c\wedge x\wedge y \end{cases}$

(C_8). $\begin{cases} c = x\wedge c \Rightarrow c\wedge y = y\wedge c\wedge x \\ c = x\vee c \Rightarrow c\vee y = y\vee c\vee x \end{cases}$

$$(C_9).\quad \begin{cases} x = c\wedge x \Rightarrow c\vee y = y\vee x\vee c \\ x = c\vee x \Rightarrow c\wedge y = y\wedge x\wedge c \end{cases}$$

$$(C_{10}).\quad \begin{cases} x = c\wedge x \Rightarrow c\vee y = y\vee c\vee x \\ x = c\vee x \Rightarrow c\wedge y = y\wedge c\wedge x \end{cases}.$$

Demonstrație. $(C_1) \Rightarrow (C_2)$. Dacă $c\in L$ este comutabil, atunci pentru orice $x,y\in L$, $c\wedge x\wedge c = (x\wedge c)\wedge c = x\wedge(c\wedge c) = x\wedge c = (x\wedge x)\wedge c = x\wedge(x\wedge c) = x\wedge(c\wedge x) = x\wedge c\wedge x$, iar un raționament dual ne conduce la egalitatea $c\vee x\vee c = x\vee c\vee x$.

$(C_2) \Rightarrow (C_3)$. Dacă $c\in L$ satisface condițiile (C_2), atunci pentru orice $x\in L$, $x\wedge c = (x\wedge c)\wedge(x\wedge c) = x\wedge(c\wedge x\wedge c) = x\wedge(x\wedge c\wedge x) = (x\wedge x)\wedge c\wedge x = x\wedge c\wedge x = x\wedge c\wedge(x\wedge x) = (x\wedge c\wedge x)\wedge x = (c\wedge x\wedge c)\wedge x = (c\wedge x)\wedge(c\wedge x) = c\wedge x$. Un raționament dual ne conduce la egalitatea $x\vee c = c\vee x$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $c = c\wedge x$ implică $y\wedge c = c\wedge y = (c\wedge x)\wedge y = (x\wedge c)\wedge y = x\wedge c\wedge y$, $c = c\vee x$, implică $y\vee c = x\vee c\vee y$, deci sunt adevărate și condițiile (C_3).

$(C_3) \Rightarrow (C_4)$. Dacă $c\in L$ satisfac condițiile (C_3), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea evidentă $c=c\wedge c$ rezultă $x\wedge c = c\wedge c\wedge x = c\wedge x$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $x\vee c = c\vee x$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = x\wedge c$ implică $c\vee y = y\vee c = y\vee c\vee(c\wedge x) = y\vee c\vee(x\wedge c) = y\vee c\vee x = y\vee x\vee c$, iar egalitatea $x = x\vee c$ implică $c\wedge y = y\wedge x\wedge c$, deci sunt adevărate și condițiile (C_4).

$(C_4) \Rightarrow (C_5)$. Dacă $c\in L$ satisface condițiile (C_4), atunci pentru orice $x\in L$ din egalitatea evidentă $c = c\wedge c$ rezultă $c\vee x = x\vee c\vee c = x\vee c$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $c\wedge x = x\wedge c$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = x\wedge c$ implică $c\vee y = y\vee c = y\vee c\vee(c\wedge x) = y\vee c\vee(x\wedge c) = y\vee c\vee x$, iar egalitatea $c = c\vee c$ implică $c\wedge y = y\wedge c\wedge x$, deci sunt adevărate și condițiile (C_5).

$(C_5) \Rightarrow (C_6)$. Dacă $c\in L$ satisface condițiile (C_5), atunci pentru orice $x\in L$ din egalitatea evidentă $c = c\wedge c$ rezultă $c\vee x = x\vee c\vee c = x\vee c$ iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $c\wedge x = x\wedge c$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = x\wedge c$ implică $y\vee c = c\vee y = c\vee(c\wedge x)\vee y = c\vee(x\wedge c)\vee y = c\vee x\vee y = x\vee c\vee y$, iar $x = x\vee c$ implică $y\wedge c = x\wedge c\wedge y$, deci sunt adevărate şi condiţiile (C_6).

$(C_6) \Rightarrow (C_7)$. Dacă $c\in L$ satisface condiţiile (C_6), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea evidentă $c = c\wedge c$ rezultă $x\vee c = c\vee c\vee x = c\vee x$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $x\wedge c = c\wedge x$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = x\wedge c$ implică $y\vee c = c\vee y = c\vee(c\wedge x)\vee y = c\vee(x\wedge c)\vee y = c\vee x\vee y$, iar $x = x\vee c$ implică $y\wedge c = c\wedge x\wedge y$, deci sunt adevărate şi condiţiile (C_7).

$(C_7) \Rightarrow (C_8)$. Dacă $c\in L$ satisface condiţiile (C_7), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea evidentă $c = c\wedge c$ rezultă $x\vee c = c\vee c\vee x = c\vee x$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $x\wedge c = c\wedge x$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $c = x\wedge c$ implică $c\wedge y = y\wedge c = y\wedge x\wedge c = y\wedge c\wedge x$, iar din $c = x\vee c$ rezultă $c\vee y = y\vee c\vee x$, deci sunt adevărate şi condiţiile (C_8).

$(C_8) \Rightarrow (C_9)$. Dacă $c\in L$ satisface condiţiile (C_8), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea $c = c\wedge c$ rezultă $c\wedge x = x\wedge c\wedge c = x\wedge c$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $c\vee x = x\vee c$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = c\wedge x$ implică $c\vee y = y\vee c = y\vee c\vee(c\wedge x) = y\vee c\vee x = y\vee x\vee c$, iar din egalitatea $x = c\vee x$ rezultă $c\wedge y = y\wedge x\wedge c$, deci sunt adevărate şi condiţiile (C_9).

$(C_9) \Rightarrow (C_{10})$. Dacă $c\in L$ satisface condiţiile (C_9), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea $c = c\wedge c$ rezultă $c\vee x = x\vee c\vee c = x\vee c$, iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $c\wedge x = x\wedge c$, deci $c\in L$ este comutabil.

Prin urmare, pentru orice $x,y\in L$, $x = c\wedge x$ implică $c\vee y = y\vee c = y\vee c\vee(c\wedge x) = y\vee c\vee x$, iar $x = c\vee x$ implică $c\wedge y = y\wedge c\wedge x$, deci sunt adevărate şi condiţiile (C_{10}).

$(C_{10}) \Rightarrow (C_1)$. Dacă $c\in L$ satisface condiţiile (C_{10}), atunci pentru orice $x\in L$, din egalitatea $c = c\wedge c$ rezultă $c\vee x = x\vee c\vee c = x\vee c$ iar din egalitatea $c = c\vee c$ rezultă $c\wedge x = x\wedge c$, deci $c\in L$ este comutabil.

B I B L I O G R A F I E

1. FĂRCAŞ, GH.: Sisteme de axiome pentru reticule oblice, St.Cerc.Mat., 24, 7(1972), 1089-1095

2. FĂRCAŞ, GH.: Certaines problemes ouverts de la theorie des treillis non-commutatifs, An.St. Univ. Iaşi, t.xxxII, Math.(1986), 11-15

3. FĂRCAŞ, GH.: Treillis non-commutatifs de type (I), Bul.St. Univ. Tehnică Tg.Mureş, t.IV(1991), 1-4.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
TÎRGU MUREŞ
ROMÂNIA