Buletinul Stiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.IX(1993), 91-94

OBSERVAŢII PRIVIND SPAŢIILE RICCI-RECURENTE CE ADMIT REPREZENTĂRI CONFORME PE UN SPAŢIU EUCLIDIAN

Pavel ENGHIŞ

ABSTRACT: In this paper one given two remarks regarding the Ricci-recurrent spaces which admit conformable representation on a euclidian space.

Fie V_n un spaţiu riemannian de metrică

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

într-un sistem de coordonate. Notăm cu R^i_{jkh} componentele tensorului de curbură, cu $R_{jh} = R^i_{jih}$ componentele tensorului lui Ricci, cu $R = g^{jh} R_{jh}$ curbura scalară şi cu

$$C^i_{jhk} = R^i_{jhk} - \frac{1}{n-2}\left(\delta^i_h R_{jk} - \delta^i_k R_{jh} + g_{jk} R^i_h - g_{jh} R^i_k\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_h g_{jk} - \delta^i_k g_{jh}\right) \tag{2}$$

componentele tensorului de curbură conformă a lui Weyl.

Se ştie [2] că tensorul C^i_{jhk} este definit numai pentru $n > 2$ şi este identic nul pentru $n = 3$.

Studiul condiţiilor în care un spaţiu V_n admite o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian conduce la

$$C^i_{jkh,r} + \frac{n-3}{n-2} V_{jkh} = 0 \tag{3}$$

unde

$$V_{jkh} = R_{jk,h} - R_{jh,k} + \frac{1}{2(n-1)}\left(g_{jh} R_{,k} - g_{jk} R_{,h}\right) \tag{4}$$

iar prin virgulă s-a notat derivarea covariantă în raport cu metrica (1).

Pentru cazul $n = 3$ condiţiile (3) devin $V_{jkh} = 0$ şi reprezintă condiţiile lui E. Cotton [1] pentru ca un spaţiu V_3 să admită o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian.

În cazul $n > 3$ condiţiile devin

$$C^i_{jkh} = 0 \qquad V_{jkh} = 0 \tag{5}$$

Al doilea grup de ecuaţii din (5) sînt o consecinţă a primelor, după cum rezultă din (3) deci avem teorema lui Schauten [3] potrivit căreia condiţia necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu V_n să admită o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian este ca tensorul lui Weyl să fie nul.

Un spaţiu V_n de metrică (1) se numeşte recurent, sau de curbură recurentă, dacă există un vector covariant φ_r astfel ca :

$$R^i_{jkh,r} = \varphi_r R^i_{jkh} \tag{6}$$

şi Ricci-recurent dacă

$$R_{jh,r} = \varphi_r R_{jh} \tag{7}$$

iar dacă

$$R_{,r} = \varphi_r R \tag{8}$$

spaţiul se numeşte de curbură scalară recurentă.

Dacă avem

$$C^i_{jkh,r} = \varphi_r C^i_{jkh} \tag{9}$$

spaţiul V_n se numeşte de curbură conformă recurentă sau conform - recurent.

Spaţiile V_n recurente sînt şi Ricci-recurente şi de curbură scalară recurentă, după cum rezultă din (6) şi (7) prin contracţie şi conform recurente după cum rezultă din (2),(6),(7) şi (8). Reciprocele acestor afirmaţii nu sînt în general adevărate.

Fie acum un spaţiu V_3 Ricci-recurent. Din (4) şi condiţiile lui Cotton avem :

$$\left[R_{jk}\delta_h^r - R_{jh}\delta_k^r + \frac{R}{2(n-1)}(g_{jh}\delta_k^r - g_{jk}\delta_h^r\right]\varphi_r = 0 \qquad (1o)$$

Deci

<u>PROPOZITIA 1.</u> Spaţiile V_3 Ricci-recurente a căror vector de recurenţă este soluţia a sistemului (1o) admit o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian.

H. Weyl a arătat că studiul invarianţilor conformi ai unui spaţiu riemannian se poate face studiind invarianţii unei conexiuni afine determinate. Această conexiune este fără torsiune şi conservă unghiurile. Din aceste condiţii rezultă :

$$\Gamma_{jk}^{i} = -\left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta_j^i \Psi_k + \delta_k^i \Psi_j - g_{jk}\Psi^i \qquad (11)$$

iar condiţiile ca spaţiul V_n să admită o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian sînt

$$C_{jkh}^{i}\Psi_i + \frac{1}{n-2}V_{jkh} = 0 \qquad (12)$$

Dacă spaţiul V_n este Ricci-recurent de vector Ψ_i , din (4) , (7) , (8) şi (12) avem :

$$\left\{C_{jkh}^{i} + \frac{1}{n-2}\left[R_{jk}\delta_h^i - R_{jh}\delta_k^i + \frac{R}{2(n-1)}(g_{jh}\delta_k^i - g_{jk}\delta_h^i)\right]\right\}\Psi_i = 0 \qquad (12)$$

Avem deci :

<u>PROPOZITIA 2.</u> Spaţiile V_n Ricci-recurente de vector Ψ_i soluţie a sistemului (12) admit o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian.

BIBLIOGRAFIE

1. E.Cotton - Sur les variétées à trois dimensions. Ann. de la Fac. de Sci. Toulouse 1899 p.410.

2. L.P.Eisenhart - Riemannian Geometry. Princeton Univ.Press,1949.

3. J.A.Schouten - Konforme Abbildung n-Dimensionaler Mannigfaltingkeiten. Math Zachr. 11, 1921, p.79-80.

4. H.Weyl - Zur Infinitesmalgeometrie. Göttingen Nachrichten 1921.

Univ. „Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca

Kogălniceanu Nr.1.

Fac.Matematică şi Informatică.