Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol. XII (1996),17-20

Dedicated to the 35th anniversary of the University of Baia Mare

QUELQUE PROPRIÉTÉS DES CONGRUENCES DANS LES PRODUITS DES VARIÉTÉS

Carmencita UROŞU

Dans le présent travail etudiées quelque propriétés de la latice des congruences sur un produit direct fini limité a l'idéal principal $(A]$, $A \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})$.

Considérons une famille $\mathcal{V}_i$, $i=\overline{1,n}$ des variétés similaires des algèbres universelles du typ τ et le produit direct : $\prod_{i=1}^{n} U_i$, $U_i \in \mathcal{V}_i$, $i=\overline{1,n}$.

Définition L' algèbre $U \in \mathcal{S}(\prod_{i=1}^{n} U_i)$, $U_i \in \mathcal{V}_i$, $i=\overline{1,n}$, s' appélle le produit direct limité a l' idéal $(A]$ si sont vérrifient les conditions suivantes :

(1) Si $a, b \in U$ résulte que $\{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \in (A]$

(2) Si $a \in U$ et $b \in \prod_{i=1} U_i$ ainsi que $\{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \subset (A]$ résulte que $b \in U$

Soit $U = \prod_{i=1}^{n}{}_{(A]} U_i$ et $\mathcal{V}_i$, $i=\overline{1,n}$ une famille des variétés independentes. Alors $(\exists)\, S_i \in \mathcal{S}(U_i)$, $i=\overline{1,n}$ ainsi que $\prod_{i=1}^{n}{}_{(A]} U_i = \prod_{i=1}^{n} S_i$ ([3]).

Proposition 1. Si $M \subseteq A$ la rélation $\theta_{(M]}$ defini par la condition :

$a \equiv b(\theta_{(M]}) \Leftrightarrow \{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \in (M]$, $\forall a, b \in \prod_{i=1}^{n}{}_{(A]} U_i$, est une rélation de congruence sur l' algèbre U.

<u>Démonstration</u> Evidemment la rélation $\theta_{(M]}$ est réflexive et symétrique. Parce que :

$a \equiv b(\theta_{(M]})$ et $b \equiv c(\theta_{(M]}) \Leftrightarrow M_1 = \{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \in (M]$

et $M_2 = \{ i \mid b(i) \neq c(i) \} \in (M]$ résulte que $\{ i \mid a(i) \neq c(i) \} \subseteq M_1 \cup M_2 \in (M]$. Donc $a \equiv c(\theta_{(M]})$ et la rélation $\theta_{(M]}$ est transitive .

Considerons les operations $F = \{f_\gamma\}_{\gamma < O(\tau)}$ et $a_p, b_p \in \prod_{i=1}^{n} {}_{(M]} U_i$, $p = \overline{1, n_\gamma}$ et

$a_p \equiv b_p(\theta_{(M]})$. Alors $M_p = \{ i \mid a_p(i) \neq b_p(i) \} \in (M]$ et $\bigcup_{p \in \overline{1,n_\gamma}} M_p \in (M]$. Donc

$\{ i \mid f_\gamma(a_1 , a_2 ,..., a_{n_\gamma})(i) \neq f_\gamma(b_1 , b_2 ,..., b_{n_\gamma})(i)\} \in (M]$ et résulte que

$f_\gamma(a_1 , a_2 ,..., a_{n_\gamma}) \equiv f_\gamma(b_1 , b_2 ,..., b_{n_\gamma})(\theta_{(M]})$.

<u>Proposition 2.</u> Si $M_\lambda \subseteq A$, $\lambda \in \Lambda$, alors

(1) $\wedge(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda) = \theta_{\wedge((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda))}$ et

(2) $\vee(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda) = \theta_{\vee((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda))}$.

<u>Démonstration</u> Si $a, b \in \prod_{i=1}^{n} {}_{(A]} U_i$, a lieu les équivalences :

$$a \equiv b(\wedge(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda)) \Leftrightarrow \{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \subseteq M_\lambda \text{ , } (\forall) \lambda \in \Lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \in \wedge((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda) \Leftrightarrow a \equiv b(\theta_{\wedge((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda)})$$

et la rélation (1) est vraie.

Parce que $(M_\lambda) \subseteq \vee((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda)$ résulte que $\theta_{(M_\lambda]} \subseteq \theta_{\vee((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda)}$ et donc

$\vee(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda) \subseteq \theta_{\vee((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda)}$. $\{ i \mid a(i) \neq b(i) \} \in \vee((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda) \Rightarrow (\exists)\, N_i \in (M_{\lambda_i}]$ $i = \overline{1,n}$ et $N_i \cap N_j \neq \varnothing$ pour $i \neq j$ ainsi que :

$\{ i \mid a(i) \neq b(i) \} = N_1 \cup ... \cup N_n$.

Considérons $C_k \in \prod_{i=1}^{n} {}_{(A]} U_i$, $k \in \overline{0,n}$, ainsi que :

$C_0 = a$, $C_n = b$ et $C_{k-1} \equiv C_k(\theta_{(M_{\lambda_k}]})$: $C_k(i) \neq C_{k-1}(i)$ si $i \in N_k$ et $C_k(i) = C_{k-1}(i)$ si $i \notin N_k$.

Donc $\{ i \mid C_k(i) \neq C_{k-1}(i) \} \subseteq N_k \in (M_{\lambda_k}]$. Résulte que $C_k(i) = C_{k-1}(i)$ $(\theta_{(M_{\lambda_k}]})$, $(\forall)\ k = \overline{1,n}$ et donc $a \equiv b(\vee(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda))$.

A lieu l' inclusion : $\theta_{V((M_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda)} \subseteq V(\theta_{(M_\lambda]} \mid \lambda \in \Lambda)$ et donc la rélation (2) est vrais.

Proposition 3. Si $\mathcal{V}_i$, $i = \overline{1,n}$, sont variétés similaire independences et $\theta_{(M]} \in \mathcal{C}(\prod_{i=1}^{n}{}_{(A]}U_i)$, $U_i \in \mathcal{V}_i$, $i = \overline{1,n}$, alors existent les congruences $\theta_i \in \mathcal{C}(S_i)$, $S_i \in \mathcal{S}(U_i)$, $i = \overline{1,n}$, aisini que $\theta_{(M]} = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} \theta_i$.

Demonstration. La congruence $\theta_{(M]} \in \mathcal{S}(\prod_{i=1}^{n}{}_{(A]}U_i)^2$. Donc la congruence $\theta_{(M]}$ est isomorphe avec une sonsalgébre $\prod_{i=1}^{n}{}_{(A]}U_i^2$.

Soit les sonsalgébres $S_i \in \mathcal{S}(U_i)$, $i = \overline{1,n}$, ainsi que $\prod_{i=1}^{n}{}_{(A]}U_i = \prod_{i=1}^{n} S_i$.

$\theta_{(M]} \in \mathcal{S}(\prod_{i=1}^{n} S_i)^2$ et $(\prod_{i=1}^{n} S_i)^2 \cong \prod_{i=1}^{n} S_i^2$. Donc existe les congruences θ_i, $i = \overline{1,n}$, $\theta_i \in \mathcal{C}(S_i)$, $i = \overline{1,n}$, et a lieu l' équivalence $a, b \in \prod_{i=1}^{n}{}_{(A]}U_i$ et $a \equiv b(\theta_{(M]})$ $\Leftrightarrow a(i) \equiv b(i)\ (\theta_i)$, $i = \overline{1,n}$. C' est á -dire $\theta = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} \theta_i$.

Bibliographie

[1] Draškovičova H. , Independence of equational classes ,Mat. Casopis, 23, 1973 , Fasc.2, 125 -135

[2] Uroşu C. , Congruences decomposables sur produits direct des algébres universelles , Anale Univ. , Timiş. , vol. 18 , Fasc.2 , 1980 , 177 - 185.

[3] Uroşu C. , Sur les congruences dans les produits des variétés , Sem. de Mat. şi Fiz. al I.P. " Traian Vuia " , 1983 , 25 - 28.

Received 01.09.1996

University "Politehnica" Timişoara
Department of Mathematics
Pta Horaţiu, 1
RO-1900 Timişoara
ROMANIA