Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol. XII (1996),97-110

Dedicated to the 35th anniversary of the University of Baia Mare

Des structures semi-topologiques

par
Petru-Avram Petrisor

1. Notations et définitions.

Soit $\mathscr{X}$ un ensemble arbitraire et $\mathscr{F}\mathscr{X}$ la famille des filtres définie sur $\mathscr{X}$. Quelquefois, s'il n'y a pas le danger d'une confusion, on peut noter cette famille avec $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{L}\mathscr{X}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, qu'on peut noter quelquefois avec $\mathscr{L}$. Nous notons avec Ω, l'ensemble de toutes les fonctions $f^{1}:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, ou f^{1} est la fonction inverse de la fonction f. On peut employer aussi les notations suivantes:

$$s^{f}_{\mathscr{L}}(\mathcal{F}) = \{Y \in \mathcal{F} \mid f(Y) \in \mathcal{F}\}$$

$$s_{\mathscr{L}}(\mathcal{F}) = \bigcup_{f\in\mathscr{L}} s^{f}_{\mathscr{L}}$$

où $f\in\mathscr{L}$ et $\mathcal{F}\in\mathscr{F}$.

On va noter avec $t_e(\mathscr{A},\mathscr{B})$ la famille des ensembles $Y\in\mathscr{A}$ pour qui existe l'ensemble $B\in\mathscr{B}$ non-vide tel que $Y\cap B\in\mathscr{B}$ et avec $t(\mathscr{A},\mathscr{B})$ la famille des ensembles $Y\in\mathscr{A}$ tel que $Y\cap B\in\mathscr{B}$ quelque soit l'ensemble $B\in\mathscr{B}$, où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des familles des sous-ensembles de $\mathscr{X}$. Si $\mathscr{A}=\mathscr{B}$, alors nous écrivons:

$$t_e(\mathscr{A},\mathscr{A})=t_e(\mathscr{A}) \text{ et } t(\mathscr{A},\mathscr{A})=t(\mathscr{A}).$$

Par $z(\mathscr{A},\mathscr{L})$ on comprend la famille $t_e(\mathscr{A},t_e(s_{\mathscr{L}}(\mathscr{A})))$.
Une famille $\mathscr{F}\mathscr{X}$ de filtres sur $\mathscr{X}$ s'appele idéale si elle vérifie les conditions:

(a) Si $\mathcal{F}_1\in\mathscr{F}\mathscr{X}$ et $\mathcal{F}_2\in\mathscr{F}\mathscr{X}$, alors $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\in\mathscr{F}\mathscr{X}$.

(b) Si $\mathcal{F}\in\mathscr{F}\mathscr{X}$ et $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'\in\mathscr{F}$, alors $\mathcal{F}'\in\mathscr{F}\mathscr{X}$.

L'application $\tau:\mathscr{X}\to\mathscr{F}\mathscr{X}$ s'appelle semi-topologie sur $\mathscr{X}$ si quelque soit $x\in\mathscr{X}$ le filtre principal $[x]$ généré par x est contenu dans $\tau(x)$, où $[x]=\{A \mid x\in A\subseteq\mathscr{X}\}$.
Le filtre $\mathcal{F}\in\mathscr{F}$ a la propriété $(\mathscr{P})$ par rapport à l'ensemble Ω si quel que soit les éléments f et g qui appartiennent à l'ensemble Ω il y a $h\in\Omega$ ayant la propriété suivante:

$$h(Y)\supseteq g(Y),\ h(Y)\supseteq f(Y) \quad Y\in\mathcal{F}.$$

2. Propriétés de la famille des filtres.

2.1 Proposition. Si $\mathcal{J}\in\mathcal{F}$ alors a lieu l'égalité:

$$t_e(t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})))=t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})),\quad g\in\mathcal{L}$$

Démonstration. Soit $M\in t_e(t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})))$. Il résulte qu'il existe l'ensemble: $N\in t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$ tel que:

$$M\cap N\in t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$$

et par conséquent on peut trouver l'ensemble $F\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$ tel que:

$$M\cap N\cap F\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$$

D'autre part nous avons $M\supseteq M\cap N\cap F\in\mathcal{J}$, $g(M)\supseteq g(M\cap N\cap F)\in\mathcal{J}$, et donc $M\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$. En conséquence l'inclusion:

$$t_e(t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})))\subseteq t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$$

a lieu.

L'inclusion de sens contraire étant évidente nous déduisons que l'égalité:

$$t_e(t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})))=t_e(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$$

a lieu et la proposition est démontrée.

2.2 Proposition. Si le filtre $\mathcal{J}\in\mathcal{F}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, alors nous avons:

$$t_e\Big(\bigcup_{f\in\mathcal{L}}s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})\Big)=\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$$

Démonstration. Soit l'ensemble Y qui appartient à la famille:

$$\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{J}))$$

Dans ce cas il existe $g\in\mathcal{L}$ et $P\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$ tel que l'ensemble $Y\cap P$ appartient à la famille $s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$ et par conséquent nous avons:

$$(1)\quad Y\cap P\in\bigcup_{f\in\mathcal{L}}s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{J})$$

qui montre qu'il existe l'ensemble $P \in \bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ tel que l'ensemble $Y \cap P$ appartient à la famille $\bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ c'est-à-dire nous avons:

$$(2) \quad Y \in t_e\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\Big)$$

et en conséquence on a l'inclusion:

$$(3) \quad \bigcup_{f \in \mathcal{L}} t_e\big(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\big) \subseteq t_e\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\Big)$$

Soit maintenant l'ensemble Z qui appartient à la famille $t_e\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\Big)$.

Dans ce cas il y a les éléments $g, h \in \mathcal{L}$ et l'ensemble $Q \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ tel que $Z \cap Q$ appartient à la famille $s^h_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$.

Le filtre $\mathcal{F}$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ il résulte qu'il existe l'élément $\omega \in \mathcal{L}$ tel que $g(Y) \subseteq \omega(Y)$ et $h(Y) \subseteq \omega(Y)$ quel que soit $Y \in \mathcal{F}$. Mais $Q \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ et donc $Q \in \mathcal{F}$ et $g(Q) \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire nous avons:

$$(4) \quad \omega(Q) \supseteq g(Q) \in \mathcal{F}$$

qui montre que l'ensemble $\omega(Q)$ appartient au filtre $\mathcal{F}$. Par conséquent nous avons:

$$Q \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$$

D'autre part nous avons:

$$(5) \quad \omega(Z \cap Q) \supseteq h(Z \cap Q) \in \mathcal{F}$$

d'où on déduit que l'ensemble $\omega(Z \cap Q)$ est un élément du filtre $\mathcal{F}$ c'est-à-dire $Z \cap Q \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$. Par suite nous trouvons l'ensemble $Q \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ tel que l'ensemble $Z \cap Q$ appartient à la famille $s^\omega_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ c'est-à-dire, nous avons:

$$(6) \quad Z \in t_e\big(s^\omega_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\big) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{L}} t_e\big(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\big)$$

qui montre que l'inclusion:

$$(7) \quad t_e\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\Big) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{L}} t_e\big(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\big)$$

a lieu et donc notre proposition est démontrée.

2.3 Proposition. Si $\mathcal{F}\in\mathcal{F}$ et $f\in\mathcal{F}_{i}$ alors nous avons:

$$t_e\left(\mathcal{F},\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)=\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$$

Démonstration. Soit $Y\in t_e\left(\mathcal{F},\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$. Il existe l'ensemble $F\in\mathcal{F}$ tel que:

$$Y\cap F\in\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$$

On peut trouver l'élément $f\in\mathcal{L}$ pour lequel $Y\cap F\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$.

Donc nous avons:

$$Y\in t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$$

et nous en déduisons qu'il y a l'inclusion:

$$t_e\left(\mathcal{F},\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)\subseteq\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$$

Pour démontrer l'inclusion contraire nous supposons que Z est un ensemble arbitraire de la famille:

$$\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$$

et par conséquent il existe l'élément $g\in\mathcal{L}$, tel que nous avons:

$$Z\in t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right).$$

On peut trouver l'ensemble $F\in\mathcal{F}$ pour qui nous avons:

$$Z\cap F\in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\subseteq\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$$

et donc l'ensemble Z appartient à la famille $t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$ qui nous conduit à l'égalité:

$$t_e\left(\mathcal{F},\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)=\bigcup_{f\in\mathcal{L}}t_e\left(\mathcal{F},t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)\right)$$

c'est-à-dire qui achève la démonstration.

2.4. Proposition. Si $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ et $f \in \mathcal{L}$ alors nous avons:

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) \subseteq t_e\left(\mathcal{F}, s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$$

Démonstration. Soit $U \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ un élément arbitraire. Donc les ensembles U et $f(U)$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$ et de $U = U \cap U$ nous déduisons que $U \in t_e\left(\mathcal{F}, s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$, c'est-à-dire l'inclusion:

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) \subseteq t_e\left(\mathcal{F}, s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})\right)$$

a lieu ce qui démontre notre assertion.

2.5 Proposition. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux éléments de la famille $\mathfrak{F}$ et $f \in \mathcal{L}$ alors l'égalité:

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$$

a lieu.

Démonstration. Soit $Y \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ un élément arbitraire. Dans ce cas nous déduisons que les ensembles Y et $f(Y)$ appartiennent à la famille $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire Y et $f(Y)$ appartiennent au filtre $\mathcal{F}_1$ et au filtre $\mathcal{F}_2$ et donc nous avons:

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \subseteq s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2).$$

On vérifie sans dificulté que l'inclusion de sens contraire a lieu.

En effet soit $Y \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$. Dans ce cas nous déduisons que les ensembles Y et $f(Y)$ appartiement à la famille $\mathcal{F}_1$ et à la famille $\mathcal{F}_2$ ce qui entraine que Y appartienne à $s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ et par conséquent nous avons:

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2) \subseteq s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$$

ce qui achève la démonstration.

2.6 Proposition. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux éléments de la famille $\mathfrak{F}$ et $f \in \mathcal{L}$ est un élément arbitraire alors nous avons:

$$t_e(\mathcal{F}_1, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1))) \cap t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2))\right) = t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)\right)\right).$$

Démonstration. Soit Y un élément arbitraire qui appartient à la famille:

$$t_e(\mathcal{F}_1, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1))) \cap t_e(\mathcal{F}_2, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)))$$

et donc il y a les ensembles $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2$ tel que :

$$Y \cap F_i \in t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_i)), i=1,2.$$

Ayant en vue l'inclusion $F_1 \cup F_2 \supseteq F_1$ et $F_1 \cup F_2 \supseteq F_2$ nous déduisons que l'ensemble $F_1 \cup F_2$ appartient du filtre $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

De $Y \in t_e(\mathcal{F}_1, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)))$ nous déduisons qu'il existe l'ensemble $F_1 \in \mathcal{F}_1$ tel que $Y \cap F_1 \in t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1))$ et par conséquent il y a l'ensemble $S_1 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ ayant la propriété :

$$Y \cap F_1 \cap S_1 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1).$$

De $Y \in t_e(\mathcal{F}_2, t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)))$ il résulte qu'il y a l'ensemble $F_2 \in \mathcal{F}_2$ tel que $Y \cap F_2 \in t_e(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2))$ et donc il y a l'ensemble $S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ ayant la propriété suivante :

$$Y \cap F_2 \cap S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2).$$

De la relation $F_1 \cup F_2 \supseteq F_1 \in \mathcal{F}_1$ nous déduisons que l'ensemble $F_1 \cup F_2$ appartient au filtre $\mathcal{F}_1$ et de $F_1 \cup F_2 \supseteq F_2 \in \mathcal{F}_2$ nous obtenons que $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_2$, c'est-à-dire $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Ayant en vue que $Q \supseteq Y \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ alors $Q \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ nous déduisons que la relation $S_1 \cup S_2 \supseteq S_1 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ entraîne que $S_1 \cup S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$. Tenant compte que $S_1 \cup S_2 \supseteq S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ nous déduisons que $S_1 \cup S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire :

$$S_1 \cup S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2).$$

Par ailleurs nous avons l'égalité :

$$Y \cap (F_1 \cup F_2) \cap (S_1 \cup S_2) = (Y \cap F_1 \cap S_1) \cup (Y \cap F_1 \cap S_2) \cup$$
$$\cup (Y \cap F_2 \cap S_1) \cup (Y \cap F_2 \cap S_2).$$

et utilisant les notations :

$$A = (Y \cap F_1 \cap S_1) \cup (Y \cap F_1 \cap S_2) \cup (Y \cap F_2 \cap S_1) \cup (Y \cap F_2 \cap S_2).$$

$$F = F_1 \cup F_2$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

nous déduisons que $A \supseteq Y_1 \cap F_1 \cap S_1 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ ce qui entraîne que $A \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$. Aussi $A \supseteq Y \cap F_2 \cap S_2 \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ entraine $A \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et par conséquent l'ensemble A appartient à la famille :

$$s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2).$$

A l'aide des notations précédentes nous obtenons les relations suivantes :

$$F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, S \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$$

et utilisant la proposition 2.5 on peut écrire :

$$S \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2).$$

Dans cette manière nous avons demontré que l'ensemble $(Y \cap F) \cap S = A$ appartient à la famille $s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et donc nous avons:

$$Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

c'est-à-dire l'ensemble Y appartient à la famille :

$$t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)\right)\right).$$

Pour l'inclusion de sens contraire soit

$$Y \in t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)\right)\right).$$

Dans ce cas par l'utilisation de la proposition 2.5 on peut écrire :

$$Y \in t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

et donc il y a l'ensemble $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tel que $Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$.

Par conséquent il y a l'ensemble $F \in \mathcal{F}_1$ tel que:

$$Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right) \subseteq t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$$

c'est-à-dire l'ensemble Y appartient à la famille $t_e\left(\mathcal{F}_1, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right)$.

Aussi il y a l'ensemble $F \in \mathcal{F}_2$ que:

$$Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right) \subseteq t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

et donc nous avons : $Y \in t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$

De cette manière nous avons démontré que Y appartient à l'famille:

$$t_e\left(\mathcal{F}_1, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right) \cap t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

et la proposition est démontrée.

2.7 Proposition. Soit $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$, $f_i \in \mathcal{L}$ $(i=1,2)$, $Y \in t_e\left(s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$ et Q un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ tel que $Q \supset Y$. Alors Q est un élément de la famille $t_e\left(s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$.

Démonstration. Soit Q un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ tel que $Q \supset Y$ où $Y \in t_e\left(s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$. Dans ce cas il y a l'ensemble $F \in s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ tel que $Y \cap F \in s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$. De $Q \cap F \supset Y \cap F \in s^{f_i}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ $\quad (i=1,2)$ on conclut que $Q \cap F \in s^{f_i}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ $\quad (i=1,2)$, c'est-à-dire nous avons:

$$Q \cap F \in s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$$

et donc $Q \in t_e\left(s^{f_1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^{f_2}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$ et la démonstration de la proposition est achevée.

2.8 Proposition. Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux éléments arbitraires de $\mathcal{F}$ et f, g des éléments qui appartiennent à la famille $\mathcal{L}$. Alors l'égalité

$$t_e\left(\mathcal{F}_1, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right) \cap t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right) = t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap \left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)\right)$$

a lieu.

Démonstration. Au début nous démontrons l'inclusion suivante:

$$(8) \quad t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right) \cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right) \subseteq t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap \left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

Dans ce but, soit l'ensemble Z qui appartient à la famille:

$$t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right) \cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$$

et donc nous déduisons qu'il existe l'ensemble $P \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ tel que $Z \cap P \in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ et de $Z \in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$ il y a l'ensemble $R \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ tel que $Z \cap R \in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$.

Nous appellerons $S=P\cup R$

Tenant compte de l'égalité $Z\cap S=(Z\cap P)\cup(Z\cap R)$ et de la relation: $Z\cap S\supseteq Z\cap P\in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ nous obtenons $Z\cap S\in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$.

On a aussi $Z\cap S\supseteq Z\cap R\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ nous déduison que l'ensemble $Z\cap S$ appartient à la famille $s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et donc l'ensemble $Z\cap S$ est un élément de $s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$.

De $S\supseteq P\in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ il résulte que l'ensemble S appartient à la famille $s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)$ et puisque $S\supseteq R\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ on déduit que nous avons $S\in s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et donc $S\in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et par conséquent il y a l'ensemble $S\in s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ tel que l'ensemble $Z\cap S$ est un élément de $s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)$ et donc nous avons $Z\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$ et, par suite, notre inclusion est démontrée.

Soit Y un ensemble qui appartient à la famille:

$$t_e\left(\mathcal{F}_1,t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right)\cap t_e\left(\mathcal{F}_2,t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

De $Y\in t_e\left(\mathcal{F}_1,t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right)$ nous déduisons qu'il y a l'ensemble $F_1\in\mathcal{F}_1$, tel que $Y\cap F_1\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$ et de $Y\in t_e\left(\mathcal{F}_2,t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$ il résulte qu'il y a l'ensemble $F_2\in\mathcal{F}_2$ tel que $Y\cap F_2\in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$.

Nous appellerons $F=F_1\cup F_2$ et ayant en vue les relations:

$$(9)\qquad Y\cap F\supseteq Y\cap F_1\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$$

$$(10)\qquad Y\cap F\supseteq Y\cap F_2\in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

et de la proposition 2.7 nous obtenons:

$$(11)\quad Y\cap F\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$$

$$(12)\quad Y\cap F\in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

et tentant compte de (8) nous avons la relation:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &Y\cap F\in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\subseteq\\ &\subseteq t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\end{aligned}$$

Tenant compte que $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ nous deduisons que Y appartient à la famille:

$$t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

et donc l'inclusion:

$$(14) \quad \begin{aligned} & t_e\left(\mathcal{F}_1, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right) \cap t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right) \subseteq \\ & \subseteq t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right) \end{aligned}$$

a lieu.

Pour démontrer l'inclusion de sens contraire, soit un ensemble Y qui appartient à la famille $t_e\left(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$. Dans ce cas il y a l'ensemble $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tel que l'ensemble $Y \cap F$ appartient à la famille

$$t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right).$$

Il est facile de démontrer l'inclusion:

$$(15) \quad t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1) \cap s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right) \subseteq t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right) \cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

qui conduit à la relation:

$$(16) \quad Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right) \cap t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$$

et par conséquent il y a $F \in \mathcal{F}_1$ tel que $Y \cap F \in t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)$ et $F \in \mathcal{F}_2$ tel que $Y \cap F \in t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)$ et donc nous avons:

$$(17) \quad Y \in t_e\left(\mathcal{F}_1, t_e\left(s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right)\right) \cap t_e\left(\mathcal{F}_2, t_e\left(s^g_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_2)\right)\right)$$

et par suite notre proposition est démontrée.

2.9 Proposition. Si $x \in \mathcal{X}$ est un élément arbitraire, alors nous avons:

$$t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_1)\right) = s^f_{\mathcal{L}}[x]$$

quelque soit $f \in \mathcal{L}$.

Démonstration. Soit $Y \in t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}([x])\right)$. Dans ce cas il y a l'ensemble $A \in [x]$ tel que l'ensemble $Y \cap A$ appartient à la famille $s^f_{\mathcal{L}}([x])$ et donc nous avons $x \in A \cap Y \cap f(A \cap Y)$.

D'autre part, nous avons $x \in f(A \cap Y) \subseteq f(Y)$ et par conséquent

$$t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}([x])\right) \subseteq s^f_{\mathcal{L}}([x])$$

qui achève la démonstration de cette proposition.

2.10 Proposition. Quel que soit $x \in \mathcal{X}$ nous avons:

$$t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}([x])\right) = s^f_{\mathcal{L}}([x])$$

Démonstration. On peut écrire:

$$t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}([x])\right) = t_e\left([x], \bigcup_{f \in \mathcal{L}}([x])\right) =$$

$$= \bigcup_{f \in \mathcal{L}} t_e\left([x], s^f_{\mathcal{L}}([x])\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} s^f_{\mathcal{L}}([x]) = s^f_{\mathcal{L}}([x])$$

en utilisant les propositions 2.3 et 2.9.

2.11 Proposition. Si $x \in \mathcal{X}$ et $f \in \Omega$ sont des éléments arbitraires alors on a l'égalité suivante:

$$t_e\left(s^f_{\Omega}([x])\right) = s^f_{\Omega}([x])$$

Démonstration. L'inclusion $s^f_{\Omega}([x]) \subseteq t_e\left(s^f_{\Omega}([x])\right)$ étant evidente il reste à démontrer l'inclusion de sens contraire. Dans ce but, soit $Y \in t_e\left(s^f_{\Omega}([x])\right)$ et donc il y a l'ensemble $P \in s^f_{\Omega}([x])$ tel que $Y \cap P \in s^f_{\Omega}([x])$ et par suite $Y \cap P \in [x]$ et $f(Y \cap P) \in [x]$. De $Y \cap P \in [x]$ nous déduisons que $Y \in [x]$ et en tenant compte que $f \in \Omega$ nous déduisons que $f(Y \cap P) = f(Y) \cap f(P) \in [x]$ et donc $f(Y) \in [x]$.

Par conséquent $Y \in [x]$ et $f(Y) \in [x]$, c'est-à-dire $Y \in s^f_{\Omega}([x])$, qui démontre notre proposition.

2.12 Proposition. Si le filtre $[x]$, où $x \in \mathcal{X}$, a la propriété $(\mathcal{P})$, alors la famille $z([x], \Omega)$ est un filtre sur $\mathcal{X}$.

Démonstration. Tenant compte de la définition de la famille $z([x], \Omega)$, où $\Omega = \{f^{-1} \mid, f \in \mathcal{L}\}$, nous avons:

$$(18)\quad z([x], \mathcal{W}) = t_e\left([x], t_e\left(s_{\mathcal{W}}([x])\right)\right) = t_e\left([x], t_e\left(\bigcup_{f \in \mathcal{W}}\left(s^f_{\mathcal{W}}([x])\right)\right)\right)$$

et ayant en vue la proposition 2.2 on peut écrire l'égalité (18) sous la forme:

$$(19)\qquad z([x],\Omega)=t_e\Big([x],\bigcup_{f\in\Omega}t_e\big(s_\Omega^f([x])\big)\Big)$$

Par l'utilisation de la proposition 2.3 nous obtenons:

$$(20)\quad z([x],\Omega)=\bigcup_{f\in\Omega}t_e\Big([x],t_e\big(s_\Omega^f([x])\big)\Big)$$

qui, à l'aide de la proposition 2.11, on peut l'écrire sous la forme:

$$(21)\quad z([x],\Omega)=\bigcup_{f\in\Omega}t_e\big([x],s_\Omega^f([x])\big)$$

et de la proposition 2.9 nous avons l'égalité:

$$(22)\quad z([x],\Omega)=\bigcup_{f\in\Omega}s_\Omega^f([x])$$

c'est-à-dire nous avons l'égalité suivante:

$$(23)\quad z([x],\Omega)=s_\Omega([x])$$

Nous allons démontrer que l'ensemble vide n'appartient pas à la famille $z([x],\Omega)$.

En effet si $\emptyset\in z([x],\Omega)=\bigcup_{f\in\Omega}s_\Omega^f([x])$ nous déduisons que l'élément $g\in\Omega$ existe tel que $\emptyset$ appartient à la famille $s_\Omega^g([x])$, c'est-à-dire $\emptyset$ et $g(\emptyset)$ appartiennent à $[x]$, que est une contradiction et donc $\emptyset\notin z([x],\Omega)$.

Soit Y_1 et Y_2 deux ensembles qui appartiennent à la famille $z([x],\Omega)$.

De la relation:

$$Y_1\in z([x],\Omega)=s_\Omega([x])=\bigcup_{f\in\Omega}s_\Omega^f([x])$$

nous déduisons qu'il existe $g\in\Omega$, tel que $Y_1\in[x]$ et $g(Y_1)\in[x]$. Mais $Y_2\in z([x],\Omega)$ et donc il y a $h\in\Omega$, tel que $Y_2\in[x]$ et $h(Y_2)\in[x]$. Le filtre $[x]$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ nous déduisons qu'il existe $\omega\in\Omega$, tel que nous avons:

$$(24)\qquad \omega(Y)\supseteq g(Y),\ \omega(Y)\supseteq h(Y),\ \ Y\in[x]$$

En fin nous avons $Y_1\in[x]$, $g(Y_1)\in\omega(Y_1)$ ce qui prouve que $Y_1\in[x]$ et $\omega(Y_1)\in[x]$.

De même nous avons $Y_2\in[x]$, $g(Y_2)\in\omega(Y_2)$ ce qui demontre que $Y_1\in[x]$, et $\omega(Y_2)\in[x]$.

En tenant compte de ceux-ci on peut écrire:

$$(25) \qquad \omega(Y_1 \cap Y_2) = \omega(Y_1) \cap \omega(Y_2) \in [X]$$

et en vertue du fait que $Y_1 \in [X]$, $Y_2 \in [X]$ nous déduisons que $Y_1 \cap Y_2 \subset [X]$, c'est-à-dire, nous avons:

$$(26) \qquad Y_1 \cap Y_2 \in s_{\Omega}^{\omega}([X]) \subseteq \bigcup_{f \in \Omega} s_{\Omega}^{f}([X]) = z([X], \Omega)$$

On va maintenant démontrer que si $Y \in z([X], \Omega)$ et $M \supseteq Y$, alors nous avons la relation suivante: $M \in z([X], \Omega)$.

Du fait que $Y \in z([X], \Omega)$ nous déduisons qu'il existe un élément $g \in \Omega$, tel que $Y \in s_{\Omega}^{g}([X])$, c'est-à-dire les ensembles Y et $g(Y)$ appartiennent à $[X]$. De la relation $M \supseteq Y \in [X]$ nous avons que $M \in [X]$ et de l'inclusion $g(M) \supseteq g(Y)$ et de $g(Y) \in [X]$ il s'ensuit que $g(M) \in [X]$ et donc nous avons:

$$(27) \qquad M \in s_{\Omega}^{\omega}([X]) \subseteq \bigcup_{f \in \Omega} s_{\Omega}^{f}([X]) = z([X], \Omega)$$

ce qui démontre notre proposition.

2.13 Proposition. Soit $\mathscr{X}$ un ensemble donné et $x \in \mathscr{X}$ un élément quelconque tel que le filtre $[x]$ a la propriété $(\mathscr{P})$. Alors l'application $\tau: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $\tau(x) = s_{\Omega}^{g}([x])$ est une semi-topologie.

Démonstration. De la proposition 2.12 il résulte que $s_{\Omega}^{g}([x]) \in \mathcal{F}$ En tenant compte que nous avons:

$$[x] \subset s_{\Omega}^{id}([x]) (\forall) \quad x \in \mathscr{X}$$

où $i_{\mathscr{X}}: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est l'application identique, nous obtenons que l'inclusion:

$$[x] \subset s_{\Omega}^{id}([x]) \subseteq \bigcup_{f \in \Omega} s_{\Omega}^{f}([x]) = s_{\Omega}^{f}([x]) = \tau(x)$$

a lieu, c'est-à-dire τ est une semi-topologie et la proposition est démontrée.

Bibliographie

1. N.Bourbaki, Elements de mathematiques, Livre III, Topologie generale, chapitres I II, Paris, 1961

Received 01.09.1996

Academia Trupelor de Uscat
str. Revoluţiei, 7
RO-2400 Sibiu
ROMANIA