Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.XII (1996),111-120

Dedicated to the 35th anniversary of the University of Baia Mare

SUR L'APPROXIMATION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS

par Ioan PIENARU

1. Si $I = [-1,1]$ on définit l'opérateur differentiel $T : C^{(2)}(I) \longrightarrow C(I)$ par légalité

$$(Tf)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) + f(x),\ x\in I . \qquad (1)$$

DEFINITION: Une fonction $f : I \longrightarrow R$ appartien de classe $\mathcal{C}(I)$ si et seulement si $f\in C^{(2)}(I)$ et $Tf\leq 0$ sur I.

Pour justifier l'introduction de cette classe de foctions considerons l'operateur diferenciel $D_{\alpha,\beta} : C^{(2)}(I) \longrightarrow C(I)$ ou

$$(D_{\alpha,\beta}f)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + [\alpha - \beta + x(\alpha + \beta + 2)]f'(x) + + (\alpha + \beta + 2)f(x),$$

α, β étant des nombres réeles. D'une part

$$(D_{-1,-1}f)(x) = -(1-x^2)f''(x)\ et \qquad (2)$$

$$(D_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}f)(x) = (Tf)(x),\ x\in I$$

mais pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$ cet opérateur intervient dans la théorie des polynômes orthogonals relativement au poids

$$(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta},\quad x \in \mathring{I} = (-1,1).$$

Plus exactement, si $R_n^{(\alpha,\beta)}$, $n = 0,1,\ldots$, il y a les polynômes de Jacobi (voir [5]) normalisés par la condition $R^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$, alors celles - ci sont les propres fonctions de l'opérateur $D_{\alpha,\beta}$. Ainsi

$$D_{\alpha,\beta}R_n^{(\alpha,\beta)} = \lambda_n^{(\alpha,\beta)}R_n^{(\alpha,\beta)},\ n=0,1,\ldots, \qquad (3)$$

avec

$$\lambda_n^{(\alpha,\beta)} = n(n+\alpha+\beta+1)+\alpha+\beta+2$$

Nous rappelons que

$$R_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = T_n(x) = \cos n(\arccos x)$$

et ainsi

$$TT_k=\lambda_k T_k, \lambda_k=K^2+1, k=0,1,\ldots, \tag{4}$$

Si $D_{\alpha\beta}$ existe et $D_{\alpha\beta}f \leq 0$ sur I alors on dira que f est une fonction (α, β) - convexe. Nous constatons que le grand nombre de fonctions $(-1/2, -1/2)$ - convexes , coïncide à la classe $\mathscr{C}$(I), mais la lieson éntre des fonctions $(-1,-1)$ - convexes et celles convexes au sens usuel étant fourni par (2). Pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$, l'ensambles des fonctions (α, β) - convexe n'est pas vide; si

$$f_0(t)=-1, f_1(t)=\frac{1}{2(\alpha+\beta+2)}\left(t-\frac{3\alpha+\beta+4}{\alpha+\beta+2}\right)$$

$$f_2(t)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\frac{1}{k^2+1}T_k(t)$$

$$f_3(t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(4n^2+1)}T_{2n}(t), \quad \textit{alors}$$

$$(D_{\alpha,\beta}f_0)(x)=-(\alpha+\beta+2)<0$$

$$(D_{\alpha,\beta}f_1)(x)=-(1-x)\leq 0,$$

$$(Tf_2)(x)=-\frac{1-T_{n+1}(x)}{2(n+1)(1-x)}\leq 0,$$

$$(Tf_3)(x)=-T_n^2(x)\leq 0, \ \textit{avec } x\in I$$

Le but de cet article est de démontrer qu'à pour chaque fonction f qui appartien de (t) il existe une souite de polynômes (P_n^f) ainsi que:

a). dégé $[P_n^f] \leq n$;

b). pour chaque n, n = 1,2,..., le polynôme P_n^f appartien de classe $\mathscr{C}$(t);

c). $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - P_n^f \| = 0$;

$$d).\ |f(x)-P_n^f(x)|\le c\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\quad n=1,2,\dots,n,\quad x\in I,\quad c>0$$

La demonstration est constructif par la mise en évindece des des opérateurs $f\to P_n^f$, n = 1,2,... A la fin on trouve l'order de saturation et la classe Favard correspondant à ces opérateurs d'aproximation.

2. A la suite on utilisera la notation

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\quad t\in I;$$

L_w^p = l'éspace linéaire des fonctions mesurables sur I qui vérifie

$$\|f\|_p<\infty,\quad ou\ \ 1\le p<\infty\ \ et$$

$$\|f\|_p=\left(\int_{-1}^{1}|f(t)|^p\,w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

X est un des éspaces L_w^p ou C (I);

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,dt;$$

$$\omega_k=\frac{1}{(T_k,T_k)}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & k=1,2,\dots\\[2mm] \dfrac{1}{\pi}, & k=0\end{cases};$$

τ_x : X → X, $x\in I$, est l'opérateur de translation défini par

$$(\tau_x f)(t)=\frac{1}{2}\left[f\left(xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}\right)+f\left(xt-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}\right)\right]$$

$$(f*g)(x)=\int_{-1}^{1}(\tau_x f)(t)\,g(t)\,w(t)\,dt$$

répresent le produit de conévolution des fonctions f, $g \in L^1_w$ ([1] - [2]).

LEMMA 1. ([1]) a) Si $T_k(x) = \cos k(\arccos x)$, alors

$(\tau_x T_K)(t) = T_K(x)T_K(t)$;

b). Pour $f,g \in L^1_w$ on a $f*g \in L^1_w$ et $f*g = g*f$, c'est à dire l'opérateur de translation est autoadjoint au sens que $\langle\tau_x f,g\rangle = \langle f,\tau_x g\rangle$, n'importe quel serait $x \in I$.

LEMMA 2. Soit T l'opérateur différentiel défini par (1) et $f,g \in C^{(2)}(I)$. Alors

$$\langle Tf,g\rangle = \langle f,Tg\rangle. \tag{5}$$

Demonstration: On observe que

$$(Tf)(t)=-\sqrt{1-t^2}\frac{d}{dt}[\sqrt{1-t^2}f'(t)]+f(t)$$

et

$$\langle Tf,g\rangle= -\int_{-1}^{1}\frac{d}{dt}[\sqrt{1-t^2}f'(t)]g(t)\,dt + \langle f,g\rangle=\langle f,Tg\rangle$$

Tenant compte de (4), l'opérateur T peut être élargi sur l'espace X de la façon suivante: si $f \in X$ posséde le developpement en série de polynômes Cebisev.

$$f\sim\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k\langle f,T_k\rangle T_k$$

alors, par définition l'image de f par T admet le developpement

$$Tf \sim\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+1)\,\omega_k\langle f,T_k\rangle T_k$$

Au cas où on accepte cette définition pour T notons par D(T) le domaine de cet opérateur. Une caracterisation de D(T) peut être trouvée par l'intermediaire d'un résultat établi par H. Bavinck ([2] le théorème 7.1.1.) Le fait que T est un opérateur différenciel d'order deux nous suggère l'introduction d'un opérateur de dérivation fractionnâire d'ordre s(s≥0) D_s par

$D_s T_k = k^{s/2} T_k, \quad k = 0,1, \ldots,$

et pour $f \in X$

$$D_s f \sim \sum_0^\infty (k^2+1)^{\frac{s}{2}} \omega_k \langle f, T_k\rangle T_k$$

Une fonction du domaine de l'opérateur D_s apartien de classe $\mathcal{C}^{s-1}$ (I) si et seulement si $D_s f \leq 0$ sur I. On constante que.

$T = D_2 \quad$ et $\quad T^k = D_{2k}, \quad k=2,3\ldots\ldots$

3. Soit la suite, d'opérateurs linéaires et positifs $J_n : C(I) \to \Pi_n$, n = 1,2 ... , Π_n etant l'éspace linéaire des polynômes de dégré ≤ n, avec des coefficients réels, définis pör l'égalité

$$J_n f = \varphi_n^* * f, \tag{6}$$

$$ou \ \varphi_n^* \in \Pi_n, \quad et$$

$$\varphi_n^*(x) = a_n \frac{1+T_{n+2}(X)}{\left(x-\cos\frac{\pi}{n+2}\right)^2}, \quad a_n = \frac{1}{(n+2)}\sin^2\frac{\pi}{n+2}$$

Concernant ces opérateurs on a montré ([3], le théoréme 1.3) que si $f \in C(I)$,

$$\|f\| = \max_{x \in I}|f(x)|, \ \omega(f,\delta) = \max_{\substack{|t-x|\leq\delta \\ t,x \in I}}|f(x)-f(t)|,$$

alors

$$\left.\begin{aligned} &|f(x)-(J_nf)(x)| \le C_1\omega(f;\Delta_n(x)),\ C_1>0, \\ &\Delta_n(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}, \\ &\|f-J_nf\| \le C_2\omega(f;\frac{1}{n+2}),\quad C_2>0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

De (6)

$$(J_nf)(x)=\langle \tau_x\varphi_n^*, f\rangle$$

En utilisant le lema 1 on résulte qui si

$$\varphi_n^*=\sum_{k=0}^{n}\omega_k\langle\varphi_n^*,T_k\rangle T_k$$

alors

$$(J_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k\langle\varphi_n^*,T_k\rangle\langle f,T_k\rangle T_k(x)$$

LEMMEN3. Si $t_{kn}^*=\langle\varphi_n^*,T_n\rangle$ *alors*

$$t_{kn}^*=\frac{1}{n+2}\left[(n-k+1)\cos\frac{k\pi}{n+2}+\frac{\cos\frac{k\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n+2}\cos\frac{(k+1)\pi}{n+2}}{\sin^2\frac{\pi}{n+2}}\right]$$

Démonstration.

Notons $r_n = \cos\frac{\pi}{n+2}$ *parce que*

$$\varphi^*_{2m}(x) = \frac{4}{(m+1)\pi}\left\{\frac{m+1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} T_k^2(r_n)\,T_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{m} T_k(r_n)\,T_k(x)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1} T_i(r_n)\,T_j(r_n)\,[T_{i+j}(x) + T_{j-i}(x)]\right\} \quad et$$

$$\varphi^*_{2m+1}(x) = \frac{2}{(2m+3)\pi}\left(\frac{2m+3}{2} + \sum_{j=0}^{m}\,[1 + T_{2j+1}(r_n)]\,T_{2j+1}(x) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{j-1}\,[T_{i+j+1}(r_n) + T_{j-i}(r_n)]\,[T_{i+j+1}(x) - T_{j-i}(x)]\right)$$

resulteque $\langle\varphi^*_n, T_k\rangle = \frac{n-k+1}{n+2}T_k(r_n) + \frac{T_k(r_n) - r_n T_{k+1}(r_n)}{(n+2)(1-r_n^2)}$

ce qui coincide à l'expression de t^*_{kn}.

Par conséquence l'image d'une fonction f pár l'opérateur J_n a l. representation.

$$J_n f = \sum_{k=0}^{n} \omega_k t^*_{kn}\langle f, T_k\rangle\, T_k \tag{8}$$

ou t'_{kn} sont précisés dans le lemme 3.

<u>THÉORÉME 1</u> Soit f une fonction d'une classe $\mathcal{C}(I)$. Il y a un suite de polynómes $(J_n f)$, $J_n f \in \Pi_n$, telle que:

i) pour chaque n le polynóme $J_n f \in \mathcal{C}(I)$;

$$ii) \qquad \|f-J_nf\| \leq C_2\omega(f;\frac{1}{n+2})$$

$$|f(x)-(J_nf)(x)| \leq C_1\omega(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2} \qquad n=1,2,\ldots; \quad x\in I$$

<u>Demonstration.</u> On considére la suite de polynôme définie e (6). De (4) et (8)

$$(TJ_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k t_{kn}^{*}\lambda_k\langle f,T_k\rangle T_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k t_{kn}^{*}\langle f,TT_k\rangle T_k\ T_k(x)\,.$$

Parce que T est autoadjoint on a $\langle f,\ T\ T_k\rangle = \langle Tf,\ T_k\rangle$, c'est dire

$$(TJ_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k t_{kn}^{*}\langle T_f,T_k\rangle T_k(x) \qquad ou$$

$$TJ_nf=J_nT_f \tag{9}$$

Si $Tf \leq$ sur I alors la positivé de l'opérateur J_n implique l'inegalité $TJ_nf \leq 0$, $TJ_nf \in C^{(2)}(I)$ ce que démontre la premier l'affirmation.

Toute fonction de classe C(I) appartient a la classe $C^1(I)$ c'est que les inégalités (7) sont verifiécs et la démonstration es complétе.

4. La répresentation (8) permet la découverte de la classe d saturation $F(X,J_n)$ de la suite d'opérateurs (J_n) définis sur l'espac X.

Soit (w_n) une suite de nombres positifs aves $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Si

$$X_1=\{f\in X;\ \|f-J_nf\|_X=o(w_n)\,,\quad n\to\infty\}$$

et l'ensemble

$$F(X,J_n)=\{f\in X;\|f-J_nf\|_X=O(w_n),\ n\to\infty\}$$

contient au moins un élément f, qui n' appartient pas a X_1, alors (w_n) est l'ordre de saturation de la suite (J_n) et $F(X,J_n)$ est appelée classe de saturation ou classe Favard de la suite d'opérateurs. Le module de continuité (au sens de CEBÎSEV) attaché à une fonction f de l'espace X se définit par

$$\omega^T(X;f;\delta)=\sup_{\substack{1-\delta\le h\le 1\\ h\in I}}\|\tau_h f-f\|_X$$

A cet module de continuité on attache la classe LIPSCHITZ ([2], [4])

$$L_{ip}^T(X,\gamma)=\{f\in X;\exists c>0,\omega^T(X;f;\delta)\le c\delta^\gamma\}\ \ avec\ \gamma\in(0,2].$$

THEORÉME 2.

$$Si\quad J_n:X\to X,\quad n=1,2,\ldots\ldots,$$

Sont des operateurs définis en (6) alors la suite (J_n) est saturée avec l'ordre $w_n = 1/n^2$ et la classe de saturation est $F(X,J_n) = L_{ip}^T(X,2)$.

Demonstration

$$De\quad(8),\quad 1-t_{1n}^*=2\sin^2\frac{\pi}{2(n+2)}$$

$$\frac{1-t_{2n}^*}{1-t_{1n}^*}=\frac{4(n+1)}{n+2}\cos^2\frac{\pi}{2(n+2)}$$

et ainsi
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-t_{2n}^*}{1-t_{1n}^*}=4$$

En utilisant les théorémes 1.5 si 2.3 de [3] ($\alpha = \beta = -1/2$), on résulte que (I_n) est sature par l'ordre (w_n), avec $w_n = 1/n^2$ et que $F(X,J_n) = L^T_{ip}(X,2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.ASKEY, S.WAIGNER, A convolution structure for Jacobi series. Amer.J.Math. 91 (1969), 463-485.

[2] H.BAVINCK, Jacobi series and approximation. Mathematical Centre Tracts 39, Math. Centrum Amsterdam, 1972.

[3] H.BAVINCK, On positive convolution operators for Jacobi series. Tohoku Math.J. 24(1972), 55 - 69.

[4] P.L.BUTZER, R.L.STENS, The operational properties of the Chebyshev Transform (II). Fractional derivatives. Proc. International Conference on the Theory of Approximation of Functions, (Kaluga,1975), Moskva, 1977, 49 - 61.

[5] G.SZEGO, Orthogonal Polynomials. Amer.Math.Soc., Colloquium Publications, vol.XXIII (Fourth edition, 1978).

Received 01.09.1996

Academia Trupelor de Uscat
str. Revoluţiei, 7
RO-2400 Sibiu
ROMANIA