Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.XII (1996),111-120

Dedicated to the 35th anniversary of the University of Baia Mare

SUR L'APPROXIMATION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS

par Ioan PIENARU

1. Si $I = [-1,1]$ on définit l'opérateur differentiel $T : C^{(2)}(I) \longrightarrow C(I)$ par légalité

$$(Tf)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) + f(x), \quad x \in I . \tag{1}$$

DEFINITION: Une fonction $f : I \longrightarrow R$ appartien de classe $\mathcal{C}(I)$ si et seulement si $f \in C^{(2)}(I)$ et $Tf \geq 0$ sur I.

Pour justifier l'introduction de cette classe de foctions considerons l'operateur diferenciel $D_{\alpha,\beta} : C^{(2)}(I) \longrightarrow C(I)$ ou

$$(D_{\alpha,\beta}f)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + (\alpha - \beta + x(\alpha + \beta + 2))f'(x) + $$
$$+ (\alpha + \beta + 2)f(x),$$

α, β étant des nombres réeles. D'une part

$$(D_{-1,-1}f)(x) = -(1-x^2)f''(x) \text{ et} \tag{2}$$

$$(D_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}f)(x) = (Tf)(x), \; x \in I$$

mais pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$ cet opérateur intervient dans la théorie des polynômes orthogonals relativement au poids

$$(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \quad , \quad x \in \mathring{I} = (-1,1).$$

Plus exactement, si $R_n^{(\alpha,\beta)}$, $n = 0,1,\ldots,$ il y a les polynômes de Jacobi (voir [5]) normalisés par la condition $R^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$, alors celles - ci sont les propres fonctions de l'opérateur $D_{\alpha,\beta}$. Ainsi

$$D_{\alpha,\beta}R_n^{(\alpha,\beta)} = \lambda_n^{(\alpha,\beta)}R_n^{(\alpha,\beta)}, \; n=0,1,\ldots, \tag{3}$$

avec

$$\lambda_n^{(\alpha,\beta)} = n(n+\alpha+\beta+1)+\alpha+\beta+2$$

Nous rappelons que

$$R_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = T_n(x) = \cos n(\arccos x)$$

et ainsi