Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol.XII (1996),155-162

Dedicated to the 35th anniversary of the University of Baia Mare

EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DES VERBANDSBEGRIFFES

Graţiela LASLO

Seit den jahren '50, werden einige algebraische Strukturen definiert, die mit Verbänden ähnlich sind, die aber die Kommutativgesätze für die Operation $\wedge$ und $\vee$ nicht erfüllen.

Die ersten solchen Strukturen werden von P.Jordan ([2]) in Hinblick auf Anwendungen in der theoretischen Physik studiert. So, ein Schiefverband ist eine algebraische Struktur $(L, \wedge, \vee)$ mit binären, eindeutigen, vollständigen Operationen. $\wedge$ und $\vee$, die für je zwei $a, b \in L$, die folgende Axiome erfüllen:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge b) \vee a = a$$

Nachträglich, hat man auch andere solche algebraische Strukturen studiert, in denen, die beiden. Operationen, im allgemeinem nicht kommutative aber associative sind, und auch noch andere Gesätze erfüllen können. Diese Strukturen werden nichtkommutative Verbände genannt.

Bis jetzt, gibt es zahlreiche Arbeiten über ihre Struktur, und über ihre Charakterisierung durch andere Axiomensysteme, manchmal ausschießlich mit binären Relationen.

In dieser Arbeit, werden wir uns auf vier von diesen Strukturen beziehen.

Erst, definieren wir einige Begriffe, welche wir im folgenden benützen werden:

Wir betrachten daß, alle Operationen die in dieser Arbeit eingreifen, vollständig und eindeutig sind.

Definition 1. Der Triplet $(L, \wedge, \vee)$, wo L eine nicht leere Menge ist, und $\wedge$ und $\vee$ sind zwei binäre Operationen, das heißt nichtkommutativer Verband, wenn, für je drei $a, b, c \in L$, die folgende Axiome gelten:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} a \wedge (a \vee b) = a \\ a \vee (a \wedge b) = a \end{cases}$$

Wenn $(L, \wedge, \vee)$ ist ein nichtkommutativer Verband, definieren wir acht binäre Relationen in L, auf diese Weise :

$$a \rho_1 b \Leftrightarrow a \wedge b = a \qquad a \rho_5 b \Leftrightarrow a \vee b = a$$
$$a \rho_2 b \Leftrightarrow b \wedge a = b \qquad a \rho_6 b \Leftrightarrow b \vee a = b$$
$$a \rho_3 b \Leftrightarrow b \wedge a = a \qquad a \rho_7 b \Leftrightarrow b \vee a = a$$
$$a \rho_4 b \Leftrightarrow a \wedge b = b \qquad a \rho_8 b \Leftrightarrow a \vee b = b, \quad a, b \in L.$$

Weil $\rho_2 = \rho_1^{-1}, \rho_3 = \rho_4^{-1}, \rho_6 = \rho_5^{-1}$ und $\rho_8 = \rho_7^{-1}$, es wäre genügend , um den Zusammenhang zwischen ρ_1, ρ_4, ρ_5 und ρ_8 zu studieren. .

Definition 2. Die algebraische Struktur $(L, \wedge, \vee)$, wo L ist eine nicht leere Menge $\wedge$ und $\vee$ zwei binäre Operationen in L sind, heißt regulären Quasiverband von Typ (l, l), (links - links), wenn die zwei Operationen sind associative, idempotente unf für je $a, b \in L$ gibt:

1) a. $\quad a \wedge b \wedge a = a \wedge b$

1) b. $\quad a \vee b \vee a = a \vee b$

2) $\quad a \wedge b = b \Leftrightarrow b \vee a = a$

Wenn man 1a) durch $a \wedge b \wedge a = b \wedge a$ und 2) durch $a \wedge b = b \Leftrightarrow b \wedge a = b$ ersetzt, erhält man die Definition des regulären Quasiverbands von Typ (r, l), (rechts - links). Wenn man diese Veänderungen für "$\vee$" (1b und 2) macht, erhält man die Definition des regülaren Quasiverbands von Typ (l, r), (links - rechts) und wenn man die betreffende Veränderungen für die beiden Operationen macht, erhält man die Definition des regulären Quasinerbands von Typ (r, r), (rechts - rechts).

Diese algebraischen Strukturen, hat man ersten Mal in [2] eingeführt.

Bemerkung. Die Axiomensysteme, welche die regulären Quasiverbände von Typ (l, l) und die regulären Quasiverbände von Typ (r, r) definieren sind selbstduale, während die Axiomensysteme welche die regulären Quasiverbände von Typ (l, r) und die regulären Quasiverbände von Typ (r, l) definieren sind zueinander dual.

Wie geben unten ein Beispiel für einen regulären Quasiverband von Typ (l, l)

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	c	c	c	c
d	c	d	c	d

$\vee$	a	d	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

In [4] hat man den folgender Satz beweisen.

(1.1) Es sei $(L, \wedge, \vee)$ eine algebraische Struktur mit zwei binären associativen Operationen.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $(L, \wedge, \vee)$ ist eine reguläre Quasiverbande von Typ (l,l)

2) Für je zwei $a, b \in L$:

$$(B') \quad \begin{cases} a \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge a = a \\ a \vee (a \wedge b) = (a \wedge b) \vee a = a \end{cases}$$

Die analogische Ergebnisse für den Typ (l, r), (r, l), (r, r) kann man durch Veränderung der Ordnung, der Durchführung des Operarions $\vee$ für Typ (l, r), durch Veränderung der Ordnung, der Durchführung des Operarions $\wedge$ für Typ (r, l), und durch Veränderung der Ordnung, der Durchführung der beiden Operarionen für Typ (r, r) erhalten.

Das gesätz (1.1) zeigt uns, daß die regulären Qasivärbende sich auf dasselbe Algemeinerungsniveau wie die nonkommutative Verbände befinden von Typ Jordan, auch Schiefverbände genannt, oder wie die noncommutative Verbände von Typ III ([1]). Für die nonkommutative Verbände von Typ IV, V und VI, die finden sich näher an die gewöhnlichen Vebände, gibt es Characterisierungen in der Sprache der binären Relationen ([1]).

In dem folgenden, werden wir eine teilweise Characterisierung mit Hilfe der binäre Relationen zeigen, auch für die reguläre Quasiverbände.

(1.2) Im jedem regulären Quasiverband vonTyp (l, l) $(L, \wedge, \vee)$, gelten folgende Aussagen:

1) $\rho_4 = \rho_8^{-1}$
2) ρ_4 şi ρ_8 sind Ordnungsrelationen in L.
3) ρ_1 şi ρ_5 sind Quasiordnungsrelationen in L.
4) $\rho_4 \Rightarrow \rho_1^{-1}$ şi $\rho_4 \Rightarrow \rho_5$.
5) $\rho_4 \cap \rho_1 = \Delta_L$ und $\rho_4 \cap \rho_5^{-1} = \Delta_L$.

Beweis

1) Für je zwei Elemente $a, b \in L$:

$$a\rho_4 b \Rightarrow a \wedge b = b \Rightarrow b \vee a = (a \wedge b) \vee a = a \Rightarrow b\rho_8 a \Rightarrow a\rho_8^{-1} b.$$

Reziprok

$$a\rho_8^{-1} b \Rightarrow b \vee a = a \Rightarrow a \wedge b = (b \vee a) \wedge b \Rightarrow a\rho_4 b.$$

2) Die Reflexivität des ρ_4 ist trivial dank der Idempotenz.

Transitivität $a\rho_4 b$, $b\rho_4 c \Rightarrow a\rho_4 c$ folgt so:

$a \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = b \wedge c = c$, und so $a\rho_4 c$.

Die Antisymmetrie $a\rho_4 b$ und $b\rho_4 a \Rightarrow a = b$ folgt so:

$a \wedge b = b$ und $b \wedge a = a$ impliziert $b \wedge a = (a \wedge b) \wedge a = a \wedge b = b$, und so $a = b$.

Weil $\rho_8 = \rho_4^{-1}$, folgt daß, auch ρ_8 ist Ordenungsrellation.

3) Die Reflexivität der Relationen ρ_1 und ρ_5 ist selbstverständlich.

Die Transitivität $a\rho_1 b$, $b\rho_1 c \Rightarrow a\rho_1 c$ folgt so:

$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, und so $a\rho_1 c$. Durch einen dualen Urteil erhält man die Transitivität der ρ_5.

4) Wenn für die Elemente $a, b \in L$ gibt $a\rho_4 b$, denn $b \wedge a = (a \wedge b) \wedge a = a \wedge b = b$, das heißt $b\rho_1 a$, und so $a\rho_1^{-1} b$. Auch $a\rho_4 b \Rightarrow a \vee b = a \vee (a \wedge b) = a$, und so $a\rho_5 b$. ■

5) Für je $a, b \in L$ $a\rho_4 b \Rightarrow a \wedge b = b$ und $a\rho_1 b \Rightarrow a \wedge b = a$. Folgt daß $a = b$.

Auch, $a\rho_4 b \Rightarrow b \vee a = a$ und $a\rho_5^{-1} b \Rightarrow b \vee a = b$. Folgt daß $a = b$.

Wir definieren jetzt (im Anlehnung mit M.D. Gerhardts für Schiefverbände in [3]), die Begriffe "Infimum" und "Supremum" eines Paars $(a, b) \in L$, so:

$$i \in \inf\{a, b\} \Leftrightarrow \begin{cases} a\rho_4 i,\ i\rho_1 b \\ a\rho_4 i' \text{ şi } i'\rho_1 b \Rightarrow i'\rho_1 i \quad \forall i' \in L. \end{cases}$$

(1)

$$s \in \sup\{a, b\} \Leftrightarrow \begin{cases} s\rho_4 a \text{ und } s\rho_5 b \\ s'\rho_4 a \text{ und } s'\rho_5 b \Rightarrow s'\rho_5 s, \forall s' \in L. \end{cases}$$

Man kann bemerken, daß in einen regulären Quasiverband, für je zwei Elemente $a, b \in L$, $\inf\{a, b\} \neq \emptyset$ und $\sup\{a, b\} \neq \emptyset$ weil $a \wedge b \in \inf\{a, b\}$ und $a \vee b \in \sup\{a, b\}$.

Im folgende, werden wir ρ_4, die zu $(L, \wedge, \vee)$ begleitete Ordnungsrelation, und ρ_1, ρ_5 die zu $(L, \wedge, \vee)$ begleiteten Quasiordnungsrelationen.

Lemma (1.3) Es sei $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$ ein algebraiches System, wo L eine nicht leere Menge ist und ρ_4, ρ_1, ρ_5 binäre Relationen in L sind.

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) ρ_4 ist eine reflexive und antisymetrische Relation in L, ρ_1, ρ_5 sind reflexive Relationen in L.

ii) $\rho_4 \Rightarrow \rho_1^{-1}$ und $\rho_4 \Rightarrow \rho_5$.

iii) $\rho_4 \cap \rho_1 = \Delta_L$, $\rho_4 \cap \rho_5^{-1} = \Delta_L$.

iv) Für jede Elemente $a, b \in L$, $\inf\{a, b\} \neq \emptyset$, $\sup\{a, b\} \neq \emptyset$,

denn in die in folgender Weise, auf L definierte Operationen:

$$a \wedge' b = \begin{cases} a \text{ wenn } b\rho_4 a \text{ oder } a \in \inf\{a, b\} \\ b \text{ wenn } a\rho_4 b, \\ i\text{, wo } i \text{ ein irgendein Element aus } \inf\{a, b\} \text{ ist, in die anderen Fallen.} \end{cases}$$

(2)

$$a \vee' b = \begin{cases} a \text{ wenn } a\rho_4 b \text{ oder } a \in \sup\{a, b\}, \\ b \text{ wenn } b\rho_4 a, \\ s \text{ wo } s \text{ ein irgendein Element aus } \sup\{a, b\} \text{ ist, in die anderen Fallen.} \end{cases}$$

erfüllen die Axiomen (B').

Beweis. Im allen Fällen, in der Definition des $\wedge'$ gilt $a\rho_4(a \wedge' b)$, und im allen Fällen, in der Definition des $\vee'$ gilt $(a \vee' b)\rho_4 a$. Denn, für je zwei $a, b \in L$, aus der Definition des $\wedge'$, und aus $(a \vee' b)\rho_4 a$, folgt $a \wedge' (a \vee' b) = a$, und aus der Definition des $\vee'$ und aus $a\rho_4(a \wedge' b)$ folgt $a \vee' (a \wedge' b) = a$.

Dann, auch aus der Definitions des $\wedge'$ und aus $(a \vee' b)\rho_4 a$ folgt $(a \vee' b) \wedge' a = a$ und aus der Definition des $\vee'$ und aus $a\rho_4(a \wedge' b)$ folgt $(a \wedge' b) \vee' a = a$, für jede $a, b \in L$. ■

Wenn wir betrachten daß $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$ ist aus einem regulären Quasiverband, von Typ (l, l) erhalten, (nämlich ρ_4 ist die begleitete Ordungrelation und ρ_1, ρ_5 sind die begleiteten

Quasiordnungsrelationen für $(L, \wedge, \vee)$, denn die Zusammenenhangen zwischen $\wedge$ und $\wedge'$, respektive $\vee$ und $\vee'$ sind:

$$a \wedge b(\rho_1 \cap \rho_1^{-1}) a \wedge' b$$

$$a \vee b(\rho_5 \cap \rho_5^{-1}) a \vee' b.$$

In der algebraischen Struktur aus der Schlußfolgerung des (1.3) können die Operationen $\wedge'$ und $\vee'$ nicht associative sein, so daß $(L, \wedge', \vee')$ im algemeinem keine regulärer Quasiverband ist.

Im jedwelcher algebraischen Struktur $(L, \wedge', \vee')$, welche die Axiomen (B') erfüllt, ist die unten definierte Relation ε reflexiv und symmetrisch: für je zwei $a, b \in L$

$a \varepsilon b \Leftrightarrow \exists x, y, z \in L$ so daß mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein kann:

i) $x \wedge' (y \wedge' z) = a$ und $(x \wedge' y) \wedge' z = b$,

ii) $x \wedge' (y \wedge' z) = b$ und $(x \wedge' y) \wedge' z = a$,

iii) $x \vee' (y \vee' z) = a$ und $(x \vee' y) \vee' z = b$,

iv) $x \vee' (y \vee' z) = b$ und $(x \vee' y) \vee' z = a$, für alles $a, b \in L$.

Es sei θ eine Kongruenzrelation in $(L, \wedge, \vee)$, so daß $\varepsilon \subseteq \theta$, und die zwei binären Operationen in $L/_\theta$:

$$(3) \qquad \begin{cases} \bar{a} \wedge'' \bar{b} = \overline{a \wedge' b} \\ \bar{a} \vee'' \bar{b} = \overline{a \vee' b} \end{cases}, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in L/_\theta.$$

Offensichlich $(L/_\theta, \wedge'', \vee'')$ ist ein reguläre Quasiverband von Typ (l, l).

(1.4) Es sei $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$ ein algebraisches System, wo L ist eine nicht leere Menge und ρ_4, ρ_1, ρ_5 binäre Relationen in L sind, welche die Relationen i) - iv) aus (1.3) erfühlen, und $(L, \wedge', \vee')$ ist eine algebraische Struktur deren Operationen sind durch (2) definiert. Wenn es gibt eine Kongruenzrelation θ in $(L, \wedge', \vee')$, so daß

$$\varepsilon \subseteq \theta, \ \rho_1 \cap \theta = \Delta_L \text{ und } \rho_5 \cap \theta = \Delta_L,$$

denn es gibt eine reguläre Quasiverband $(L'', \wedge'', \vee'')$ von Typ (l, l) und eine Zuordnung $\varphi : L \to L''$, so daß:

$$a \rho_4 b \Leftrightarrow \varphi(a) \rho_4'' \varphi(b),$$

$$a \rho_1 b \Leftrightarrow \varphi(a) \rho_1'' \varphi(b),$$

$$a \rho_5 b \Leftrightarrow \varphi(a) \rho_5'' \varphi(b)$$

wo ρ_4'' die zu $(L'', \wedge'', \vee'')$ begleitete Ordnungsrelation ist.

Beweis. Durch i) und ii), die Definitionen der $\wedge'$ und der $\vee'$ sind korrect. Nehmen wir $L'' = L/_\theta$, wo θ ist die Kongruenzrelation aus der Voraussetzung und $\wedge''$, $\vee''$ die Operationen definierte durch (3). Denn $(L/_\theta, \wedge'', \vee'')$ ist eine regulärer Quasiverband von Typ (l, l). Sei $\varphi : L \to L/_\theta$, $\varphi(a) = \bar{a}$, $\forall a \in L$.

Für je zwei $a, b \in L$: $a \rho_4 b \Rightarrow a \wedge' b = b \Rightarrow \overline{a \wedge' b} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge'' \bar{b} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \rho_4'' \bar{b}$. Reziprok, $\bar{a} \rho_4'' \bar{b} \Leftrightarrow \overline{a \wedge' b} = \bar{b} \Rightarrow a \wedge' b \theta b$. Es sei $i = a \wedge' b$. Denn $i \rho_1 b$, aber $a \wedge' b = i \Rightarrow i \rho_1 b$. Aber $i = a \wedge' b \theta b$. Weil $\theta \cap \rho_1 = \Delta_L$, folgt daß $i = b$. So, $a \wedge' b = b$, das ist $a \rho_4 b$.

Wir haben, in dieser Weise gezeigt, daß für je zwei $a, b \in L$:

$\bar{a}\rho_4''\bar{b} \Rightarrow a\rho_4 b$,

und so ist die Behauptung $a\rho_4 b \Leftrightarrow \varphi(a)\rho_4''\varphi(b)$ bewiesen.

Es sei die Elemente $a, b \in L$ so daß $a\rho_1 b$.

$a\rho_1 b \Rightarrow a \in \inf\{a, b\} \Rightarrow a \wedge' b = a \Rightarrow \overline{a \wedge' b} = \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \wedge'' \bar{b} = \bar{a} \Rightarrow \bar{a}\rho_1''\bar{b}$.

Also $a\rho_1 b \Rightarrow \bar{a}\rho_1''\bar{b}$. Reziprok, es sei zwei Elemente $a, b \in L$ so daß $\bar{a}\rho_1''\bar{b}$.

$\bar{a}\rho_1''\bar{b} \Rightarrow \overline{a \wedge' b} = \bar{a} \Rightarrow a \wedge' b\,\theta\, a$.

Es sei $i = a \wedge' b\,\theta\, a$. Das impliziert $a\theta i$. Aber aus der Definition des $\wedge'$, kommt daß $a\rho_4 i$. Durch ii) folgt daß $a\rho_1 i$. Wir bekommen daß $a(\rho_1 \cap \theta)i$, also $a = i$. Es folgt $a \wedge' b = a$. Durch der Definition des $\wedge'$, (für $a \neq b$), nur zwei Fällen sind möglich:

1) $b\rho_4 a$,

2) $a \in \inf\{a, b\}$,

aber im jedes Fall, folgt daß $a\rho_1 b$.

So, haben wir gezeigt daß $a\rho_1 b \Leftrightarrow \varphi(a)\rho_1''\varphi(b)$.

Analog, können wir gezeigen daß $a\rho_5 b \Leftrightarrow \varphi(a)\rho_5''\varphi(b)$. ■

Wir bemerken noch daß, wenn das algebraische System $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$ von einem regulären Qasiverband von Typ (l, l), entstammt es erfüllt trivial die Vorasussetzung des Satzes **(1.4)**, mit $\wedge' = \wedge, \vee' = \vee$ und $\varepsilon = \theta = \Delta_L$.

Ordnet man jedem regulären Quasiverband von Typ (l, l) ein System $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$, wie im **(1.2)** zu, und weiter, ordnet man diesem System eine regulärer Quasiverband wie in **(1.4)** zu, so bekommt man die Implicationen:

$$\left.\begin{array}{l} a \wedge b = i_1 \\ \bar{a} \wedge'' \bar{b} = i_2 \end{array}\right\} \Rightarrow i_1(\rho_1 \cap \rho_1^{-1})i_2 \text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = s_1 \\ \bar{a} \vee'' \bar{b} = s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow s_1(\rho_5 \cap \rho_5^{-1})s_2 .$$

Dann, ordnet man einem System $(L, \rho_4, \rho_1, \rho_5)$, eine regulärer Quasiverband von Typ (l, l) wie in **(1.4)** zu, und weiter, ordnet man diesem Quasiverband ein algebraisches System wie in **(1.2)** zu,so bekommt man:

$a\rho_i b \Leftrightarrow \bar{a}\rho_i''\bar{b}$, für je zwei $a,b \in L$ und $i \in \{1,4,5\}$.

Also die Relationen ρ_i sind vollständig bestimmt von ρ_i'' und reziprok,während die Elemente $a \wedge b$ und $a \vee b$ sind nur bis eine Äquivalenzrelation ($\rho_1 \cap \rho_1^{-1}$, respektiv $\rho_5 \cap \rho_5^{-1}$) bestimmt.

Um die analogischen Sätzen, für die andere Type von regulärer Quasiverbände zu erhalten, müssen wir in **(1.2)**, **(1.3)** und in **(1.4)**, ρ_5 durch ρ_8^{-1}, ρ_8 durch ρ_5^{-1} ersetzen und den Ordnung der Durchführung der Operation $\vee$ verändern für Typ (l, r); ρ_1 durch ρ_4^{-1} und ρ_4 durch ρ_1^{-1} ersetzen und den Ordnung der Durchführung des Operation $\wedge$ verändern für die Typ (r, l), und wir müssen alle diese Veränderungen für den Typ (r, r) machen.

Literaturverzeichnis

[1] Gh. Fărcaş, Treillis non - commutatifs, Preprint nr.1 Tech.Univ.Târgu-Mureş, Research Seminar (1992) 5 - 27.

[2] P. Jordan, Über nichtkommutative Verbände, Arh. Math., 2 (1949), 56-59.

[3] M.D. Gherhardts, Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände, Math. Ann. 161 (1965), 231 - 240.

[4] Laslo Graţiela, Preprint nr.5, 1996, Universitatea "Petru Maior" Târgu-Mureş (im erscheinen).

[5] S. Matsushita, Zur Theorie der Nichtkommutativen Verbände I, Math, Ann., 137 (1959), 1-8.

Received at: 02.09.1996

Universitatea "Petru Maior" Târgu-Mureş
Str. Nicolae Iorga nr. 1
RO-4300 Târgu-Mureş
ROMANIA