Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare
Seria B, Matematică-Informatică, vol XIII(1997), 79-84

SUR UN PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Lidia E. KOZMA

Nous connaisons le principe d'identité pour les fonctions holomorphes. Ceci explique le prolongement des relations qui ont lieu sur l'axe réel - en plan complexe

Exemple:

$$sh\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\ ;\ ch\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

On peut généraliser en $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$sh\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ ch\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Nous envisageons cette propriétée des fonctions holomorphes comme le prolongement d'une propriétée qui a lieu dans un espace (réel) à partir d'une dimension vers deux dimensions.

Il y a beaucoup des extensions des fonctions complexes. Par la suite nous prolongerons la notion de fonction holomorphe pour $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, où $\mathbb{C}^3$ - est un ensemble de points $t \in \mathbb{C}^3$, $t = (x, y, z)$ $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Les vecteurs $t = x \cdot 1 + y\,i + z \cdot e$ ont la première partie $x + iy$ - un nombre complexe, $z \in \mathbb{C}$ et e = un nouveau versor avec des propriétées particulières.

Des operations sur eux sont:

Soi

$$t_1 = x_1 + i\,y_1 + e\,z_1$$

$$t_2 = x_2 + i\,y_2 + e\,z_2$$

$$t_1 + t_2 \overset{def}{=} x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2) + e\,(z_1 + z_2)$$

avec ses proprietées habituélles.

Il nous faut définir une multiplication sur $\mathbb{C}^3$. Appelons produit $t_1 \cdot t_2$ le vecteur obtenu en multipliant $t_1 = x + iy + ez$ et $t_2 = a + ib + ec$; $t_1 ; t_2 \in \mathbb{C}^3$

(1) $$t_1 t_2 = (x,y,z)\cdot(a,b,c) \overset{def}{=} (xa - yb\,,\, xb + ya\,,\, c(x+y) + z(a+b))$$

Ce produit conserve les premiéres deux coordonnées comune dans ensemble C, mais la troisieme est construite de telle sorte que le produit en soit associatif.

L'élement neutre en est (1,0,0) et l'élement symétrique existe pour tout le nomero $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a^2 + b^2 > 0$.

On remarquera que

(2) $$\begin{cases} i^2 = -1 \\ i \cdot e = e \\ e^2 = 0 \end{cases}$$

Nous admetterons le fait que ces opérations conferent a l'ensemble $\mathbb{C}^3$ une structure de corps. Introduisons maintenent des vecteurs conjugués t_1 et t_2 pour tout les vecteurs $t \in \mathbb{C}^3$.

(3) $$\begin{cases} t = x + iy + ez \\ t_1 = x - iy + ez \\ t_2 = x + iy + \overline{e} z \end{cases}$$

et " $\overline{e}$ " - est le conjugué du verseur "e".

On remarquera que $e \cdot \overline{e} = 2$

Il nous faut définir une fonctions holomorphe sur $\mathbb{C}^3$; $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ de la maniére suivante: par prolongement.

Soit $f = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ $f = u + v\,i + w \cdot e$

Considerons:

(4) $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2$$

On deduit queles dérivées formelles:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{-\left(1+\dfrac{\bar{e}}{e}\right)\dfrac{\partial f}{\partial x}+2\dfrac{\partial f}{\partial z}}{2\left(1-\dfrac{\bar{e}}{e}\right)} \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial t_1} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial t_2} = \dfrac{e}{e-\bar{e}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}
\end{cases}
$$

et on voir sur (3) que

$$
(6)\qquad \begin{cases}
x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e+\bar{e}}{e-\bar{e}}\,t + t_1 - e\,t_2\right] \\[2ex]
y = \dfrac{1}{2i}\left[t - t_1\right] \\[2ex]
z = \dfrac{1}{2i\,(e-\bar{e})}\left[(1+i)\,t - 2i\,t_2\right]
\end{cases}
$$

Signalons que le premiere des deux relations du (6) sont en particulièr les connues relations

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ pour $\bar{e} = 0$ et $t_2 = 0$, $C^3 = C$ et (6) généralise ces

formules en ensemble C^3 . Les relations (5) deviennes

$$
(7)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e+\bar{e}}{e-\bar{e}}\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial t_1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial t_2} = \dfrac{e}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{e-\bar{e}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}\right]
\end{cases}
$$

Il est immédiat de vérifier que pour $\bar{e} = 0$, $t = z$, $t_1 = \bar{z}$, $t_2 = 0$ avec z ; $\bar{z}$ - conjugues en $\mathbb{C}$.

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\ \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right] \end{aligned}$$

connue dans l'ensemble $\mathbb{C}$ pour $f(x,y)$ - monogenne en $\mathbb{C}\,(f : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$.

Les conditions Cauchy-Riemann pour la monogenitée des fonctions ainsi introduits prend ici la forme

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial t_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e + \bar{e}}{e - \bar{e}}\,\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] \end{cases}$$

Exemple. Supposons que $\bar{e} = -e$. Les egalités (6), (7), (8) nous donne

$$\text{(6')} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left[t_1 + e\,t_2\right] \\[2ex] y = \dfrac{i}{2}\left[t_1 - t\right] \\[2ex] z = \dfrac{1}{4e}\left[(1 - i)\,t - t_2\right] \end{cases}$$

$$(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial t_1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial t_2} = \dfrac{1}{2}\left[e\,\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{e}\,\dfrac{\partial f}{\partial z}\right] \end{cases}$$

$$(8') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \qquad et \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

La fonction $f(x,y,z) = (u,v,w) = u(x,y,z) + i\,v(x,y) + e\,w(x)$ une fonction particullierre de troix variabiles.

Par conséquent si la fonction $f(x,y,z) = u(x,y,z)$ (avec $v = 0$; $w = 0$), une fonction scallaire ou une fonction vectorielle mais avec une direction constante nous donne avec $(8')\,(10)$ $f(x,y,z) =$ constante

Autrement dit il n'éxiste pas des fonctions monogennes definies comme avant avec une direction constante sans etre lui meme une constante. Cette observation nous nous rappele le théoreme du Liouville.

Autre observations. Soit

$f(x,y,z) = u(x,y,z) + i\,v(x,y,z) + e\,w(x,y,z) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

Nous avons:

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + e\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = -i\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + e\,\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\[2ex] \dfrac{e}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + e\,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{e - \bar{e}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial z} + e\,\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

avec $e^2 = 0$ $\quad et \quad$ $e \cdot \bar{e} = 2$

Il est immédiat de vérifier que:

$$(12) \qquad \begin{cases} u_x = v_y = -u_z \\ v_x = -u_y = -v_z \\ w_x = -w_y = -w_z \end{cases}$$

équivalente avec la definition des fonctions vectorielles analitiques du Si-Ping-Cheo et Rainch.
Le systéme (12) vérifie les conditions du Hendrick et Ingold d'une applications conforme ⇒ w = constante.
Il est aisé de voir

$$(u_x)^2 + (v_x)^2 + (w_x)^2 = (v_y)^2 + (v_x)^2 = (u_y)^2 + (u_z)^2 = (u_z)^2 + (v_z)^2 + (w_z)^2$$

et

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta v = 0$$

$$\Delta w = 0 \Rightarrow w = \mathit{constante}$$

et note $f = (u, v, w)$ est monogene, mais elle n'est pas une application conforme ⇒ w = constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. **B.B.SABAT**, Introducere în analiza complexă, partea a II-a, (Funcţii de mai multe variabile, Moscova, 1976)
[2]. **Petru CARAMAN**, Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale, monografie. Editura Academiei Române, 1968

Received 10.05.1997

North University of Baia Mare
Department of Mathematics and Computer Science
Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: hdik@univer.ubm.ro