Bul. Ştiinţ. Univ. Baia Mare, Ser. B,
Matematică-Informatică, Vol. XIV(1998), Nr.1, 65-74

Dedicated to Professor Iulian Coroian on his 60^{th} anniversary

UNE GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION ARITHMÉTIQUE DE D.POMPEIU

Maria S. POP

Résumé. Dans ce travail on considere une généralisation d'une équation arithmétique de D.Pompeiu [2], dans le sens que nous poserons le probleme de determiner tous les nombres naturels N de n chiffres, écrits dans la base $B = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, qui ont la propriété que leur carrée est un nombre qui, écrit en base B, se termine en N, donc $N^2 = A B^n + N$. Nous allons resoudre l'équation a l'aide de deux méthodes indiquées par Pompeiu [2] et nous démontrons que l'on peut trouver tout au plus $2^k - 2$ solutions. Pour B=10 nous retrouvons les résultats de Popovici [3].

1. C.Hubert [1] a remarqué que le nombre $N = 9376$, écrit dans le systeme décimal a la curieuse propriété que le carré N^2 a les derniers chiffres 9376.

D.Pompeiu [2] a résolu le probleme de la détermination de tous les nombres entiers nonnégatifs N, de n chiffres dans le systeme décimal, qui ont la propriété que N^2 écrit dans le systeme décimal se termine en N. Ce probléme s'exprime par l'équation arithmétique

$$N^2 = A \cdot 10^n + N, \tag{1}$$

ou A est un nombre entier nonnégatif.

C.Popovici [3], [4] a généralisé cette équation arithmetique dans le sens de la détermination de tous les nombres entiers nonnégatifs N, de n chiffres dans le systeme décimal, qui ont la propriété que N^m écrit dans le meme systeme se termine en N, m étant un nombre naturel, donc

(2) $$N^m = A \cdot 10^n + N$$

Nous allons généraliser l'équation arithmétique (1) dans le sens que nous poserons le probleme de déterminer tous les nombres naturels N de n chiffres écrits dans le systeme numérique de base B, $B \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, qui ont la propriété que N^2, écrit dans la base B, se termine en N. Ces nombres N ont la propriété que

(3) $$N^2 = AB^n + N,$$

ou A est un nombre entier nonnégatif.

2. Nous allons résoudre l'équation arithmétique (3) a l'aide de deux méthodes indiquées par Pompeiu [2].

Nous considérons que les nombres sont écrits dans le systeme numérique de base $B \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Supposons que la décomposition en facteurs premiers de B est

(4) $$B = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

ou p_i sont nombres premiers et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$; $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

L'équation (3) est équivalente a

(5) $$B^n / N(N-1)$$

Parce que N et N-1 sont premiers entre eux, dans les cas $k=1$, donc $B = p^\alpha$, il est nécessaire et suffisant que B^n / N ou $B^n / N-1$. Car le nombre N, de n chiffres, a la propriété $B^{n-1} \leq N < B^n$, on obtient que $N = 0$ ou N=1, c'est-a-dire que les nombres considérés sont nombres d'un seul chiffre, correspondant seulement a n=1; pour n>1, l'équation (3) est sans solutions.

Dans le cas k>1, la condition (5) est équivalente au $C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-1} = 2^k - 2$ systems de congruences

(6) $$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{a_{m,j}^n} \\ N \equiv 1 \pmod{b_{m,j}^n} \end{cases}$$

$a_{m,j} = p_{m_1}^{\alpha_{m_1}} p_{m_2}^{\alpha_{m_2}} \cdots p_{m_s}^{\alpha_{m_s}}$; $b_{m,j} = p_{m_{s+1}}^{\alpha_{m_{s+1}}} \cdots p_{m_k}^{\alpha_{m_k}}$; $(a_{m,j}, b_{m,j}) = 1$; $a_{m,j} \cdot b_{m,j} = B$ ou on peut choisir les indices différents $m_1 < m_2 < \ldots < m_i$; $m_i, \ldots, m_1 \in \{1, \ldots, k\}$ dans C_k^i manières pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ et $m_{i+1} < \ldots < m_k$ sont les indices excédants.

Par conséquence, si $\mathcal{F}_i = \{m : \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, k\};$ *m fonction strictement croissante* $\}$, alors $card\, \mathcal{F}_i = C_k^i$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Nous allons résoudre, auparavant, chacune des congruences du système (6), pour chaque $m \in \mathcal{F}_i$ et $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, basant sur les résultats préliminaires:

(7) $n \le \varphi(a_{m,i}^n)$; $n \le \varphi(b_{m,i}^n)$; $a_{m,i}^{\varphi(b_{m,i}^n)} + b_{m,i}^{\varphi(a_{m,i}^n)} \equiv 1 (mod\, B^n)$

(8) $a_{m,i}^{\varphi(b_{m,i})} \equiv 1\, (mod\, b_{m,i})$; $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ étant la fonction d'Euler.

La premiere congruence du systeme (6) est équivalente a

$$N = a_{m,i}^n \mu_{m,i}, \text{ ou } \mu_{m,i} < b_{m,i}^n \text{ et } b_{m,i}^{n-1} \le a_{m,i}\, \mu_{m,i}.$$

Tenant compte de (7) et (8), la derniere congruence du systeme implique que N, écrit avec n chiffres dans la base B est la terminaison en n chiffres de $a_{m,i}^{\varphi(b_{m,i}^n)}$.

En effet $N = a_{m,i}^n r_{m,i} < B^n$, ou $r_{m,i}$ est le reste du division de $a_{m,i}^{b_{m,i}^{n-1}\varphi(b_{m,i})-n}$ par $b_{m,i}^n$.

Nous pouvons maintenant énoncer la

Théoreme 1. *Etant donné un nombre naturel* $B \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, *soit* $B = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $k \ge 1$, *sa décomposition en facteurs premiers. Les nombres entiers nonnégatifs N, de n chiffres,* $n \in \mathbb{N}^*$ *dans le systeme numérique de base B, qui ont la propriété que leur carré* N^2 *est un nombre qui se termine en N, sont*

-dans le cas $k = 1$, $N \in \{0, 1\}$ *pour* $n = 1$ *et* $N \in \emptyset$ *pour* $n > 1$;

-dans les cas $k > 1$ *il y a tout au plus* $2^k - 2$ *solutions* $N = a_{m,i}^n r_{m,i}$, *ou* $a_{m,i} \cdot b_{m,i} = B$; $(a_{m,i}, b_{m,i}) = 1$ *sont nombres premiers entre eux*

et différents de B et $r_{m,i}$ *est le reste du division de* $a_{m,i}^{b_{m,i}^{n-1}\varphi(b_{m,i})-n}$ *par* $b_{m,i}^{n}$,

ou $t \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ *indique le nombre de facteurs premiers distinctifs de* $a_{m,i}$,

choisis dans C_k^t *manieres, autant de fonctions croissants* $m:\{1,2,\ldots,t\} \to \{1,2,\ldots,k\}$ *il y en a.*

Pour $B = 10 = 2 \cdot 5$ nous avons le résultat de Popovici [3]

Corollaire. *Les nombres entiers nonnégatifs N, de n chiffres dans le systeme décimal, qui ont la propriété que N^2 écrit dans le systeme décimal, se termine en N, sont les terminaisons en n chiffres dans le systeme décimal de nombres entiers* $2^{4 \cdot 5^{n-1}}$ *et* $5^{2^{n-1}}$.

En **particulier,** pour $n = 1,2,3,4,\ldots$ nous avons les dernieres suites de solutions:

N^I: 5; 25; 625; 0625; 90625; 890625; 2890625,..

N^{II}: 6; 76; 376; 9376; 09376; 109376; 7109376,...

pour l'équation (3). Nous obtenons pour $n = 4$ que seulement 9376 est solution de l'équation (1).

Il faut remarquer que $N^I + N^{II} = 10^n + 1$ et qu'un calcul de récurrence permet de trouver une premiere suite de solution et que la seconde suite se forme avec la relation ci-dessus.

Exemple 1. Pour $B = 6 = 2 \cdot 3$; $k = 2$, la Théoreme 1 conduit a la solution

$a_{m,i}$	$b_{m,i}$	$\varphi(b_{m,i}^{n})$	$a_{m,i}^{\varphi(b_{m,i}^{n})}$	$N_{(6)}$		
				$n=1$	$n=2$	$n=3$
2	3	$2 \cdot 3^{n-1}$	$4^{3^{n-1}}$	4	44	344
3	2	2^{n-1}	$3^{2^{n-1}}$	3	13	213

Exemple 2. Pour $B=30=2\cdot 3\cdot 5$, les nombres naturels écrits dans cette base avec les chiffres $0,1,2,\ldots,9,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{19}$, où $\alpha_0=10; \alpha_1=11,\ldots,\alpha_{19}=29$.

Il y a $2^3-2=6$ solutions.

$a_{m,j}$	$b_{m,j}$	$\varphi(b^n_{m,j})$	$a_{m,j}^{\varphi(b^n_{m,j})}$	n=1	
				$a_{m,j}^{\varphi(b^n_{m,j})}$	$N_{(30)}$
2	$3\cdot 5$	$8\cdot 15^{n-1}$	$2^{8\cdot 15^{n-1}}$	$2^8=\overline{8\alpha_6}$	α_6
3	$2\cdot 5$	$4\cdot 10^{n-1}$	$3^{4\cdot 10^{n-1}}$	$3^4=\overline{2\alpha_{11}}$	α_{11}
5	$2\cdot 3$	$2\cdot 6^{n-1}$	$5^{2\cdot 6^{n-1}}$	$25=\alpha_{15}$	α_{15}
$3\cdot 5$	2	2^{n-1}	$15^{2^{n-1}}$	$15=\alpha_5$	α_5
$2\cdot 5$	3	$2\cdot 3^{n-1}$	$10^{2\cdot 3^{n-1}}$	$10^2=\overline{3\alpha_0}$	α_0
$2\cdot 3$	5	$4\cdot 5^{n-1}$	$6^{4\cdot 5^{n-1}}$	$6^4=\overline{1\alpha_3 6}$	6

It faut remarquer que $\alpha_6+\alpha_5=\alpha_{11}+\alpha_0=\alpha_{15}+6=11_{(30)}$, c'est-a-dire, si N' este un solution pour les facteurs premiers entre eux $a'_{m,j}, b'_{m,j}$ choisis d'une certaine maniere, alors N'' qui correspond à $a_{m,j}=b'_{m,j}; b_{m,j}=a'_{m,j}$ a la propriété que $N'+N''=100\ldots01_{(30)}=30^n+1$.

Remarque. Cette propriété est vraiment pour toute base B, comme (7) donc il est suffisant de détermine seulement $2^{k-1}-1$ solutions de l'équation (3).

2. Au moyen de la deuxieme méthode Pompeiu [2], généralisée par Popovici [3] nous obtenons les suites de solutions avec un calcul de recurrence, indiquée par la théoreme suivante:

Théoreme 2. *Pour qu'un nombre entier nonnégatifs* N_n *de* n *chiffres* $n \geq 2$ *écrit dans le systeme numérique en base* $B \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, *satisfasse l'équation*

(9) $$N_n^2 = A_n B^n + N_n$$

ou $A_n \in \mathbb{N}, N_n = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_{0(B)}}$ *il est nécessaire et suffisant que sa terminaison* $N_{n-1} = \overline{a_{n-2} \ldots a_{0(B)}}$ *de (n-1) chiffres écrit en base B satisfasse l'équation*

(10) $$N_{n-1}^2 = A_{n-1} B^{n-1} + N_{n-1},$$

ou $A_{n-1} \in \mathbb{N}$ *et que le premier chiffre de* N_n, a_{n-1}, *satisfasse la relation*

(11) $$A_{n-1} + a_{n-1}(2N_{n-1} - 1) \equiv 0 \pmod B$$

Soit $B = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *la décomposition en facteurs premiers de* B, $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ *fixé,* $\mathscr{F}_i = \{m : \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,k\}$; m *fonction strictement croissante}* $m_j = m(j)$; $j = 1,\ldots,i$; $a_{m,i} = p_{m_1}^{\alpha_{m_1}} \ldots p_{m_i}^{\alpha_{m_i}}$; $b_{m,i}$ *tel que* $a_{m,i} \cdot b_{m,i} = B$, *donc* $a_{m,i}$ *et* $b_{m,i}$ *sont premiers entre eux.*

Si N_{n-1} *est divisible par* $a_{m,i}$ *et premier avec* $b_{m,i}$, *alors on remplaçe la congruence (11) par le systeme de congruences*

(12) $$\begin{cases} a_{n-1} \equiv A_{n-1} \pmod{a_{m,i}} \\ a_{n-1} + A_{n-1} \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}. \end{cases}$$

Démonstration. De $N_n = a_{n-1} B^{n-1} + N_{n-1}$ et (9) on a

(13) $$N_n^2 - N_n = B^{n-1}(a_{n-1}^2 B^{n-1} + 2a_{n-1} N_{n-1} - a_{n-1}) + (N_{n-1}^2 - N_{n-1}),$$

d'ou, il résulte que l'équation (10) est satisfaite avec

$$A_{n-1} = A_n B - a_{n-1}^2 B^{n-1} - a_{n-1}(2N_{n-1} - 1)$$

et aussi, car $n > 2$, il est nécessaire que

$$A_{n-1} + a_{n-1}(2N_{n-1} - 1) \equiv 0 \pmod B.$$

Réciproquement, si les relations (10) et (11) sont satisfaites et $N_n = a_{n-1}B^{n-1} + N_{n-1}$, alors de (13) il résulte que $N_n^2 - N_n$ est divisible par B^n

Si N_{n-1} est premier avec $b_{m,i}$ et divisible par $a_{m,i}$ alors nous remplaçons la congruence (11) par le systeme de congruences

$$(14) \qquad \begin{cases} A_{n-1} + a_{n-1}(2N_{n-1} - 1) \equiv 0 \pmod{a_{m,i}} \\ A_{n-1} + a_{n-1}(2N_{n-1} - 1) \equiv 0 \pmod{b_{m,i}} \end{cases}$$

La premiere congruence est équivalente a la congruence $A_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{a_{m,i}}$ et utilisant la derniere congruence nous obtenons la congruence

$$A_{n-1}N_{n-1} + a_{n-1}(2N_{n-1}^2 - N_{n-1}) \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}$$

et par (10) nous avons $A_{n-1}N_{n-1} + a_{n-1}(2A_{n-1}B^{n-1} + N_{n-1}) \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}$,

d'ou $A_{n-1}N_{n-1} + a_{n-1}N_{n-1} \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}$, donc

$$A_{n-1} + a_{n-1} \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}$$

En effet, nous obtenons le systeme de congruences (12).

Remarque. Les congruences (12) déterminent le premier chiffre a_{n-1} de N_n, écrit en base B : si α est le dernier chiffre de A_{n-1}, donc $A_{n-1} \equiv \alpha \pmod B$ et $\alpha \in \{0, 1, \dots, B-1\}$, alors $\begin{cases} a_{n-1} + \alpha \equiv 0 \pmod{b_{m,i}} \\ a_{n-1} \equiv \alpha \pmod{a_{m,i}} \end{cases}$

Le cas $\alpha = 0$ n'est pas possible parce que $B^n / N_{n-1}(N_{n-1} - 1)$ et parce que $N_{n-1} < B^{n-1}$, on implique $N_{n-1} \in \{0, 1\}$

Nous allons illustrer l'emploi du théoreme 2 par l'exemple suivant.

Exemple 3. Pour $B=30$, dans l'exemple 2, nous avons déterminé les nombres avec un chiffre $n=1$ qui ont la propriété (3).

Etant donné que $N_1^2 - N_1 = A_1 B$, pour $N_1 = \alpha_6 = \alpha_6$ implique $A_1 = 8$, nous avons $N_2 = \overline{\alpha_1 \alpha_{(6)}}$ ou

$$\begin{cases} \alpha_1 = 8 \pmod 2 \\ \alpha_1 + 8 = 0 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \pmod 2 \\ \alpha_1 = -7 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_{12}$$

donc $N_2 = \overline{\alpha_{12}\alpha_6}$. Car $N_2^2 - N_2 = A_2 B^2 = \overline{\alpha_6 \alpha_{17}} \cdot B^2$ nous avons $N_3 = \overline{\alpha_2 \alpha_{12} \alpha_6}$

ou $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_{17} \pmod 2 \\ \alpha_2 - \alpha_{17} = 0 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \pmod 2 \\ \alpha_2 = 3 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 3$ donc $N_3 = \overline{3\alpha_{12}\alpha_6}$

Remarque. Si un nombre naturel N, écrit dans le systeme de base B avec n chiffres satisfait l'équation (3), alors il satisfait aussi (15) l'équation

(15) $$N^r - N = AB^n \Leftrightarrow N^r = N \pmod{B^n}$$

ou $r \in N^* \setminus \{1\}$ et $A \in N^*$.

La réciproque n'est pas valable. Par exemple dans le cas B=6 , r=3, et $n=1$ tout autre N satisfont l'équation (15), quoique N∈{2,5} ne satisfont pas l'équation (3).

Car l'équation (15) est équivalente a $B^n / N(N^{r-1} - 1)$, $B^{n-1} \le N < B^n$ et N et $N^{r-1} - 1$ sont premiers entre eux, il en resulté que nous devons considérer seulement les cas:

$N = 0$, acceptable rien que $n=1$;

(16) $$N^{r-1} \equiv 1 \pmod{B^n} \Leftrightarrow N^{r-1} \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}},\ j = 1,\dots,k$$

(17) $$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{a_{m,i}^n} \\ N^{r-1} \equiv 1 \pmod{b_{m,i}^n} \end{cases}$$

ou $a_{m,i}, b_{m,i}$ sont les facteurs premiers entre eux, $a_{m,i} b_{m,i} = B$ et $m \in \mathscr{F}_i$, $i = 1,\dots,k-1$ sont les fonctions l'énonce de la Théoreme 2, de ce fait $2^k - 1$ cas pour $n > 1$ et 2^k cas pour $n = 1$.

Parce que la solution d'une telle congruence pour $n>1$ nécessite des calculs laborieux il est préférable nous d'appliquer la methode avec un calcul de récurrence, analogue avec Théoreme 2 de Popovici [4].

Théoreme 3. *Pour qu'un nombre naturel N_n de n chiffres, $n \geq 2$, écrit dans le systeme numérique en base $B\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, satisfasse l'équation*

(17) $$N_n^r = A_n B^n + N_n$$

où $r\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $A_n\in\mathbb{N}$, $N_n=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0}_{(B)}$ il est nécessaire et suffisant que sa terminaison $N_{n-1}=N_n-a_{n-1}B^{n-1}$ de (n-1) chiffres écrit, en base B satisfasse l'équation

(18) $$N_{n-1}^r = A_{n-1}B^{n-1} + N_{n-1}$$

où $A_{n-1}\in\mathbb{N}$ et que le premier chiffre a_{n-1} de N_n satisfasse la relation

(19) $$(rN_{n-1}^{r-1}-1)a_{n-1} + A_{n-1} \equiv 0 \pmod B,$$

qui est équivalente a

(20) $a_{n-1} \equiv A_{n-1} \pmod B$, *si* N_{n-1} *et B sont premiers entre eux;*

(21) $(r-1)a_{n-1} + A_{n-1} \equiv 0 \pmod B$, *si* N_{n-1} *divisible par B;*

(22) $$\begin{cases} a_{n-1} \equiv A_{n-1} \pmod{a_{m,i}} \\ (r-1)a_{n-1} + A_{n-1} \equiv 0 \pmod{b_{m,i}}, \end{cases}$$

si on trouve les facteurs $a_{m,i}, b_{m,i}$ premiers entre eux, tel que $a_{m,i}\cdot b_{m,i}=B$ et N_{n-1} est divisible par $a_{m,i}$ et premier avec $b_{m,i}$

La démonstration est semblable a la démonstration de Théoreme 2 avec la mention que $A_{n-1} = BA_n - MB^{n-1} - a_{n-1}(rN_{n-1}^{r-1}-1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Hubert, C.**, Le curieux nombre 9376, La Nature, septembre, 1949, p.282

[2] **Pompeiu, D.**, O ecuaţie aritmetică, Buletin Ştiinţific, secţ. de Şt. Matem. şi fizice, Tome IV nr.1, ian-mart 1952, Editura Academiei Române, p 1-5

[3] **Popovici, C., P.**,Sur une équation arithmétique de Pompeiu D., Bull. Math de la Soc. Sci. Math. de la Roumanie, Tome 9(57) nr. 3-4, 1967, p 91-97

[4] **Popovici C., P.**,Une généralisation d'une équation arithmétique de D.Pompeiu, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la Roumanie Tome 13 (61) nr. 1, 1969, p. 73-84

[5] **Vrânceanu Gr.**, Asupra unei ecuaţii aritmetice, Comunicările Acad. Române, Tome III, nr.1-2, 1953 p.5-8

Received 19.06.1998

North University of Baia Mare

Department of Mathematics and Computer Science

Victoriei 76, 4800 Baia Mare

ROMANIA

E-mail: mspop@univer.ubm.ro